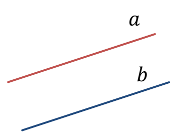
Стереометрия

Параллельность прямых и плоскостей

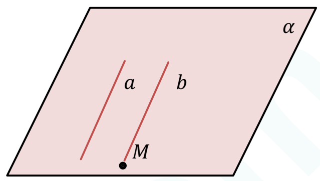
Параллельные прямые – это прямые в пространстве, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Параллельность двух прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$.



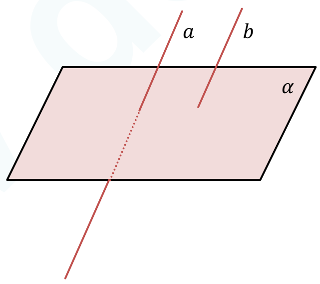
Теорема (о параллельности прямых). *Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.*

Доказательство.

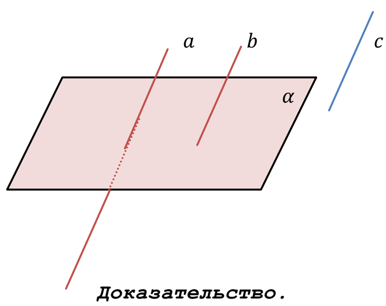
Рассмотрим прямую a и точку $M: M \notin a$. Через прямую a и точку M проходит плоскость α. Через точку M проведём прямую $b: a \parallel b$. Из планиметрии известно, что такая прямая будет единственной, итак b – единственная прямая, проходящая через M параллельно прямой a (ч.т.д).



Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми. *Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*



Теорема о параллельности трёх прямых. *Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.*



Доказательство.

Предположим, что $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel b$. Для этого нужно доказать, что прямые a и b: 1) лежат в одной плоскости и 2) не пересекаются.

1) *Отметит какую-нибудь точку K на прямой b и обозначим буквой плоскость α, проходящую через прямую a и точку K. Докажем, что прямая $b \in \alpha$. Если допустить, что прямая b пересекает плоскость α, то по лемме прямая c также пересекает плоскость α. Но так как $a \parallel c$, то прямая a пересекает плоскость α, что приводит к противоречию $a \in \alpha$.*
2) *Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), параллельные прямой c, что невозможно.*

Теорема доказана.

Возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:

а) прямая лежит в плоскости;

б) прямая и плоскость имеют только одну общую точку;

в) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

Прямая и плоскость называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек.

Теорема (признак параллельности прямой и плоскости). *Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.*

Доказательство.

Рассмотрим плоскость α и две прямые: $b \parallel c$, причём $b \in \alpha, c \notin \alpha$. Докажем, что $c \parallel \alpha$ от обратного. Предположим, что $c \nparallel \alpha$. Тогда прямая c пересекает плоскость α, а значит по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также пересекает плоскость α, что приводит к противоречию (ведь по условию $b \in \alpha$). Итак, прямая c не пересекает плоскость α, а значит $c \parallel \alpha$ (ч.т.д).