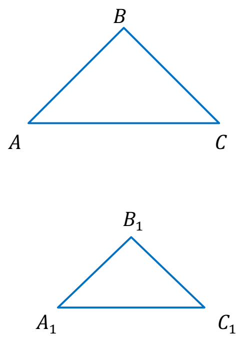
Планиметрия

Подобные треугольники

Подобные треугольники – это треугольники, у которых углы соответственно равны, а стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого (стороны пропорциональны некоторому числу k – *коэффициенту подобия*).



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$:

$$\angle A = \angle A_1$$
$$\angle B = \angle B_1$$
$$\angle C = \angle C_1$$
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

Свойства подобных треугольников:

1. Отношение периметров подобных треугольников равно их коэффициенту подобия
$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k;$$
2. Отношение площадей подобных треугольников равно их квадрату коэффициента подобия
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2.$$

Признак подобия (первый).
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

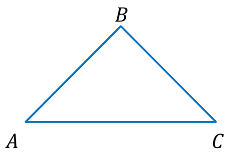
Признак подобия (второй).
Если две стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника, а углы между ними соответственно равны, то такие треугольники подобны.

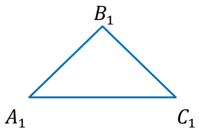
Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Признак подобия (третий).
Если три стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Если в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Пример: Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а их коэффициент подобия равен 2. Известно, что $AB = 6$, $BC = 8$ и $AC = 10$. Найдите стороны, периметр и площадь треугольника $A_1B_1C_1$.





Дано:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 : k = 2;$

$AB = 6;\ BC = 8;\ AC = 10.$

Найдите стороны, периметр и площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение:

1) Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то пропорциональность их сходственных сторон будет следующая:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$$

или

$$\frac{6}{A_1B_1} = \frac{8}{B_1C_1} = \frac{10}{A_1C_1} = 2.$$

Получим $A_1B_1 = 3$, $B_1C_1 = 4$ и $A_1C_1 = 5$.

2) Так как стороны треугольника ABC известны, то найти его периметр не составит большого труда. Периметр $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 6 + 8 + 10 = 24$.

Найти его площадь можно по формуле Герона

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p – полупериметр, тогда

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)},$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 24.$$

3) Так как треугольники $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, а их коэффициент подобия равен $k = 2$, то по свойствам подобных треугольников:

1. $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = 2$ или $\frac{24}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = 2$, то $P_{\Delta A_1B_1C_1} = 12;$
2. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = 2^2$ или $\frac{24}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = 4$, то $S_{\Delta A_1B_1C_1} = 6.$

Ответ: 3, 4 и 5; 12 и 6.