

Экономические задачи

Вклады. Кредиты. Финансы

Структура задачи (15) Единого государственного экзамена по математике

Вопросы	Частота	Метод
"Вклады"	умеренно	Принцип сложных процентов
"Кредиты"	часто	
"Ценные бумаги"	редко	
иные задачи, связанные с финансовыми операциями	редко	Минимаксный анализ

Принцип сложных процентов

В финансовой математике существуют два принципа начисления процентов – принцип простых процентов и принцип сложных процентов. Принцип простых процентов (ППП) известен с 6 класса и трудностей не вызывает. Напомним лишь, что $q\%$ дробное число $\frac{q}{100}$. Например, 15% соответствует $\frac{15}{100} = 0.15$.

В задачах на проценты удобно использовать коэффициент роста k .

$$q\% \longrightarrow k = 1 + \frac{q}{100}$$

Задача 1. 1 октября 2014 года в магазине детских игрушек кукла "Маша" продается по цене **5000** рублей. Каждый месяц первого числа цена на куклу увеличивается на постоянную сумму, равную **10%** от октябрьской стоимости. Сколько будет стоить кукла 1 января 2015 года?

Рассмотрим принцип сложных процентов (ПСП) на реальных примерах, но сначала освежим себе память, заглянув в 9 класс.

Пример 1. Дана последовательность чисел $2, 4, 8, 16, 32 \dots$. Найдите сумму ее первых десяти чисел.

Решение.

Легко заметить, что каждое следующее число в 2 раза больше предыдущего. Тогда эту последовательность чисел можно представить так:

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 \dots$$

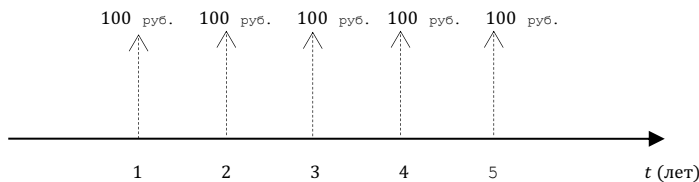
Значит искомая сумма $S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$. Как вы понимаете, это геометрическая прогрессия, а значит, сумма ее первых n членов вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Следовательно, сумма первых её десяти членов равна

$$S_{10} = \frac{2 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2046. \quad (1)$$

Пример 2. На графике изображен поток денежных взносов на открытый в банке вклад. Каждый год в банк вносится сумма равная 100 (руб.), а банковская годовая ставка равна 15 (%). Давайте, выясним, какая сумма будет накоплена в банке через пять лет.



Задача 2. Студент каждый год откладывает в банк 1000 рублей от своей стипендии под 12% годовых. Какую сумму банк начислит ему за 3 года, если никаких других операций с деньгами не производилось?

Решение .

Как видно из графика сумма всех взносов за 5 лет будет равна 500 руб. Но итоговая сумма окажется больше этой суммы, так как банк начисляет проценты на поступающие взносы. Давайте, посмотрим, как это происходит, заполнив таблицу данными наших расчетов.

Таблица 1.

Период	Начало периода t (руб.)	Начисления за период (руб.)	Конец периода t (руб.)
t = 1	100	100 · 0.15	100 + 100 · 0.15 или 100 · 1.15 (умножение на k)
t = 2	100 · 1.15 + 100	(100 · 1.15 + 100) · 0.15	1.15 + 100 + (100 · 1.15 + 100) · 0.15 или (100 · 1.15 + 100) · 1.15
t = 3	(100 · 1.15 + 100) · 1.15 + 100	((100 · 1.15 + 100) · 1.15 + 100) · 0.15	((100 · 1.15 + 100) · 1.15 + 100) · 1.15

Из таблицы 1 видно, что проценты начисляются на проценты. В этом и заключается принцип сложных процентов (ПСП). Продолжая этот процесс, на конец четвертого года получим

$$\left(\left(\left(\left(100 \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15.$$

На конец пятого года -

$$\left(\left(\left(\left(\left(100 \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15 + 100 \right) \cdot 1.15.$$

Обратите внимание, что каждый раз происходит умножение на коэффициент роста k . После упрощения это выражение примет вид

$$100 \cdot 1.15 \cdot (1.15^4 + 1.15^3 + 1.15^2 + 1.15 + 1) \text{ или } 100 \cdot 1.15 \cdot \frac{1.15^5 - 1}{1.15 - 1}.$$

Итого, искомая сумма равна 775.37 рублей.

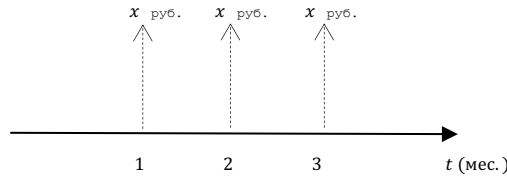
Таким образом, **накопленная сумма в банке через n лет** вычисляется по формуле:

$$S = x \cdot k \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}, \quad (2)$$

где x (руб.) - ежегодный взнос, k - коэффициент роста ($k = 1 + \frac{q}{100}$, q - банковская процентная ставка), n (мес. год) - период времени.

Замечание 1. Сегодня формула (2) используется финансовыми банками при расчете суммы денежного вклада.

Пример 3. На графике изображен поток денежных платежей за взятый в банке кредит. Каждый месяц в банк вносится сумма равная x (руб.), а банковская месячная ставка равна q (%). Давайте, выясним, какую сумму нужно вносить каждый месяц, если размер кредита равен 100 000 рублей, $q = 0.15$, а срок погашения 3 месяца.



Решение.

Выполним расчеты и представим их в таблице 2.

Таблица 2.

Период	Начало периода t (руб.)	Начисления за период (руб.)	Конец периода t (руб.)	Долг перед Банком с учетом выплаты x (руб.)
$t = 1$	100 тыс.	$100 \text{ тыс.} \cdot 0.15$	$100 \text{ тыс.} + 100 \text{ тыс.} \cdot 0.15$ или $100 \text{ тыс.} \cdot 1.15$	$100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x$
$t = 2$	$100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x$	$(100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x) \cdot 0.15$	$(100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15$	$(100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15 - x$
$t = 3$	$(100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15 - x$	$((100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15 - x) \cdot 0.15$	$((100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15$	$((100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15 - x$

Решение.

Итак, на конец третьего года долг клиента перед банком будет равен $((100 \text{ тыс.} \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15 - x) \cdot 1.15 - x$. Упростив, получим $100 \text{ тыс.} \cdot 1.15^3 - x \cdot 1.15^2 - x \cdot 1.15 - x$. Как вы понимаете, это выражение нужно приравнять к 0, ведь к концу отведенного срока кредит должен быть полностью погашен. Получим

$$100 \text{ тыс.} \cdot 1.15^3 = x \cdot (1.15^2 + 1.15 + 1).$$

И снова геометрическая прогрессия, тогда сворачивая по формуле, равенство примет вид

$$100 \text{ тыс.} \cdot 1.15^3 = x \cdot \frac{1.15^3 - 1}{1.15 - 1}.$$

Откуда

$$x = 100 \text{ тыс.} \cdot 1.15^3 \cdot \frac{1.15 - 1}{1.15^3 - 1} = 43 \text{ 797,7 рублей.}$$

Таким образом, **кредит, взятый в банке на n единиц времени**, вычисляется по формуле:

$$S \cdot k^n = x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}, \quad (3)$$

где S (руб.) – размер кредита, x (руб.) – разовый платеж за кредит, k – коэффициент роста, n (мес., год) – срок погашения.

Формулу (3) можно преобразовать к виду (4):

$$x = S \cdot \frac{k - 1}{1 - k^{-n}}. \quad (4)$$

Задача 3. Школьник купил в кредит телефон стоимостью 50 000 рублей. Какую сумму денег ему придется переплатить за покупку, если кредит нужно погасить четырьмя равными платежами, а банковская годовая ставка равна 12%?

Замечание 2. Сегодня формула (4) используется всеми банками при расчете разового платежа x по кредиту размера S .

Минимаксный анализ

В задании 17 ЕГЭ по математике встречаются задачи, в которых экономические явления могут быть описаны математическими функциями. Описанные функции исследуют с помощью производной. Само же исследование функции связано с нахождением её точек экстремума (точек максимума, точек минимума), наибольшего и наименьшего значений функции. Такое исследование носит название *минимаксный анализ*. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 4. Найдите точки экстремума, наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = x^3 - 48x$$

Пример 4. Годовая прибыль в млн рублей от продажи x тысяч единиц продукции при цене p тысяч рублей за единицу описывается функцией $f(x) = -\frac{x^2}{2} + (p-1)x - 7$. При каком наименьшем значении p через пять лет суммарная прибыль составит не менее 215 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается функцией

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + (p-1)x - 7.$$

Эта функция является квадратичной с параметром p . Исследуем функцию с помощью производной. Её производная по x равна

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x + (p-1).$$

Найдем её точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + (p-1) = 0.$$

Откуда $x = p-1$. Так как ветви графика $f(x)$ направлены вниз ($a = -\frac{1}{2}$), то единственная точка экстремума является точкой максимума, а значит $f(x)$ в этой точке достигает своего наибольшего значения, то есть при $x = p-1$. Вычислим значение:

$$f(p-1) = -\frac{1}{2} \cdot (p-1)^2 + (p-1)(p-1) - 7 = \frac{(p-1)^2}{2} - 7.$$

Данная функция зависит от цены p и выражает наибольшую годовую прибыль. В задаче сказано, что за пять лет суммарная прибыль должна составить не менее 215 млн рублей. Получим

$$5 \cdot \left(\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \right) \geq 215 \Leftrightarrow (p-1)^2 \geq 100 \Leftrightarrow (p-11)(p+9) \geq 0.$$

Откуда $p \geq 11$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшая цена составляет 11 тысяч рублей.

Пример 5. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человека. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ рублей. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько условных единиц в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение .

Пусть x рабочих будет направлено на первый объект, тогда на второй объект будет направлено $(24 - x)$. Их суточные зарплаты будут соответственно равны $4x^2$ и $3(24 - x)^2$. В день начальник будет должен платить рабочим $4x^2 + 3(24 - x)^2$.

Обозначим это выражение через $f(x)$. Её производная по x равна

$$f'(x) = 8x + 3 \cdot 2 \cdot (24 - x)^{2-1} \cdot (-1)$$

или

$$f'(x) = 14x - 144.$$

Найдем её точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 14x - 144 = 0.$$

Откуда $x = \frac{72}{7}$. Значит $f(x)$ достигает своего наименьшего значения при $x = \frac{72}{7} \approx 10,3$. Так как x количество рабочих (то есть натуральное число), то исследуемая функция достигает своего наименьшего значения в точке $x = 10$ или $x = 11$. Найдём и сравним оба значения:

$$f(10) = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot (24 - 10)^2 = 400 + 3 \cdot 196 = 988,$$

$$f(11) = 4 \cdot 11^2 + 3 \cdot (24 - 11)^2 = 484 + 3 \cdot 169 = 991.$$

Таким образом, исследуемая функция $f(x)$ на множестве натуральных чисел достигает своего наименьшего значения в точке $x = 10$. Поэтому необходимо направить 10 рабочих на первый объект, 14 рабочих - на второй объект. Зарплата составит 988 условных единиц.

Экономические задачи

1. (ЕГЭ, 2021) В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 тыс. рублей на 6 лет. Условия его возврата таковы:
- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 - в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
 - к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.
- Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 498 тыс. рублей. Найдите r .

Ответ: 16.

2. (ЕГЭ, 2021) 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r - **целое** число;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,25 млн рублей.

Ответ: 9.

3. (ЕГЭ, 2021) 15 декабря 2024 года планируется взять кредит в банке на 31 месяц. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й (с января 2025 года по июнь 2027 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
 - 15 июня 2027 года долг составит 100 тыс. рублей;
 - 15 июля 2027 года кредит должен быть полностью погашен.
- Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 555 тыс. рублей?

Ответ: 400 тыс. руб.

4. (ЕГЭ, 2021) 15 января 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1200 тыс. рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й (с февраля по ноябрь 2025 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
 - 15 ноября 2025 года долг составит 400 тыс. рублей;
 - 15 декабря 2025 года кредит должен быть полностью погашен.
- Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Ответ: 1288 тыс. руб.

- 5. (досрочный ЕГЭ, 2020)** В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле 2027, 2028, 2029 годов долг остаётся равным S тыс. рублей;
 - выплаты в 2030 и 2031 годах равны по 338 тыс. рублей;
 - к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.
- Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Ответ: 1090 тыс. руб.

- 6. (ЕГЭ, 2020)** В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 630 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 630 тыс. рублей;
 - выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
 - к июлю 2031 года долг будет полностью погашен.
- Найдите r , если известно, что долг будет выплачен и общий размер выплат составит 915 тыс. рублей.

Ответ: 10.

- 7. (ЕГЭ, 2020)** Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.

Ответ: 25 млн руб.

- 8. (досрочный ЕГЭ, 2020)** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

Ответ: 4.

9. (ЕГЭ, 2019) Строительство нового завода стоит 220 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки завода цена продукции $p = 9$ тыс. руб. за единицу, каждый следующий год цена увеличивается на 1 тыс. руб. за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Ответ: 5.

10. (ЕГЭ, 2019) В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S - целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023
Долг (млн рублей)	S	$0,7S$	$0,3S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет больше 3 млн рублей.

Ответ: 8.

11. (досрочный ЕГЭ, 2018) В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 311 040 рублей?

Ответ: 201 300 руб.

12. (ЕГЭ, 2018) В регионе А среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 51200 рублей и ежегодно увеличивался на 20%. В регионе Б среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 72900 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона Б увеличивается на 12%

ежегодно, а население увеличивалось на $m\%$ ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах А и Б стал одинаковым. Найдите m .

Ответ: 5.

13. (ЕГЭ, 2018) 15 декабря планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1102 тысячи рублей?

Ответ: 1 млн руб.

14. (ЕГЭ, 2018) 15 декабря планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 10-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1198 тысяч рублей?

Ответ: 200 тысяч руб.

15. (ЕГЭ, 2017) Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1, 2, \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Ответ: $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$.

16. (ЕГЭ, 2017) Дмитрий взял кредит в банке на сумму 270200 рублей. Схема выплат такова: в конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% оставшуюся сумму долга, а затем Дмитрий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Дмитрий погасил кредит за три года, причём каждый его следующий платеж был равен ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Дмитрий заплатил в первый раз?

Ответ: 26 620 руб.

17. (ЕГЭ, 2017) В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (млн рублей)	S	$0,8S$	$0,5S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей?

Ответ: 6.

18. (ЕГЭ, 2017) В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
- Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 260 000 рублей, а во второй год – 169 000 рублей?

Ответ: 30.

19. (ЕГЭ, 2016) Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет на x млн рублей, x – **целое** число. Найдите наименьшее значение x , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Ответ: 8.

20. (ЕГЭ, 2016) Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме того, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Ответ: 12 млн руб.

21. (ЕГЭ, 2016) 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Ответ: 7.

22. (ЕГЭ, 2016) В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – **целое** число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с января по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Ответ: 11.

23. (ЕГЭ, 2016) В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тысяч рублей, где S – **натуральное** число, на три года. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (тыс. рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Ответ: 200.

24. (ЕГЭ, 2016) В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
 - в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным S тыс. рублей;

- выплаты 2020 и 2021 годов равны по 360 тыс. рублей;
 - к июлю 2021 года долг будет полностью выплачен.
- Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Ответ: 1050 тыс. руб.

25. (ЕГЭ, 2016) В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r , если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн рублей.

Ответ: 10.

26. (ЕГЭ, 2015) В июле планируется взять кредит на сумму 8052000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
- Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ: 3110400 руб.

27. (ЕГЭ, 2015) Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Ответ: 10.

28. (ЕГЭ, 2015) Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ: 5800 000.

29. (МИОО, 2015) Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей

должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Ответ: в течение восьмого года.

30. (досрочный ЕГЭ, 2015) 31 декабря 2013 года Сергей взял кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк 53 240 рублей. Сергей выплатил долг тремя равными платежами. Какова сумма, взятая Сергеем в долг?

Ответ: 132 400 руб.

31. (досрочный ЕГЭ, 2015) Каждый год 1 сентября, начиная с 2011 года, гражданин Васильев вкладывает в банк некоторую сумму денег (каждый год одну и ту же) под 10% годовых. Годовые начисляются 1 раз в год 31 августа на всю сумму вклада. Какую сумму вкладывает Васильев ежегодно, если к окончанию дня 31 августа 2014 г на счету Васильева было 72 820 рублей? Предполагается, что никаких финансовых операций, кроме указанных выше, не производилось.

Ответ: 20 000.

32. (досрочный ЕГЭ, 2015) Каждый год 1 октября, начиная с 2011 г, гражданин Фёдоров вкладывает в банк некоторую сумму денег (каждый год одну и ту же) под 20% годовых. Годовые начисляются 1 раз в год 30 сентября на всю сумму вклада. Какую сумму вкладывает Фёдоров ежегодно, если к окончанию дня 30 сентября 2014 г на счету Фёдорова было 109 200 рублей? Предполагается, что никаких финансовых операций, кроме указанных выше, не производилось.

Ответ: 24 863,3 руб.

33. (досрочный ЕГЭ, 2015) Гражданин Антонов 1 февраля 2012 года положил в банк некоторую сумму денег, кратную 1000 рублей, под 10% годовых. После этого он ежегодно (начиная с 2013 года) 1 февраля снимал по 100 000 рублей, при этом на его счёте и по сей день сохранилась некоторая сумма. Какую наименьшую сумму Антонов мог положить в 2012 году? Предполагается, что банк начисляет процент на остаток вклада один раз в год 31 января; других финансовых операций со счётом Антонова не производилось.

Ответ: 249 000 руб.

34. (досрочный ЕГЭ, 2015) Гражданин Ефимов 1 февраля 2012 года положил в банк некоторую сумму денег, кратную 1000 рублей, под 20% годовых. После этого он ежегодно (начиная с 2013 года) 1 февраля снимал по 50 000 рублей, при этом на его счёте и по сей день сохранилась некоторая сумма. Какую наименьшую сумму Ефимов мог положить в 2012 году? Предполагается, что банк начисляет процент на остаток вклада один раз в год 31 января; других финансовых операций со счётом Ефимова не производилось.

Ответ: 106 000 руб.

35. Имеется три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. рублей до 20 тыс. рублей, а цена акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. рублей и не больше 60 тыс. рублей. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

Ответ: 12,5% и 15%.