Метод координат

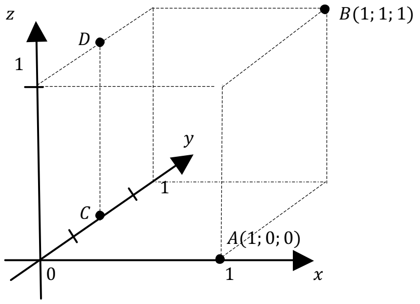
Векторы в пространстве

Структура задачи C2(16) Единого государственного экзамена по математике

Вопросы	Частота	Метод
Угол между прямыми	умеренно	метод координат или "классика"
Угол между прямой и плоскостью	умеренно	
Угол между двумя плоскостями	редко	
Расстояние от точки до прямой	умеренно	
Расстояние от точки до плоскости	редко	
Расстояние между двумя прямыми	редко	"классика"
Сечения многогранников	умеренно	
Тела и поверхности вращения	редко	

Метод координат в пространстве

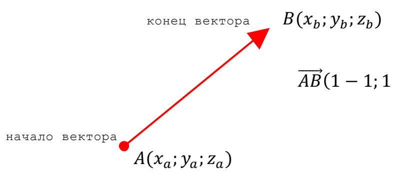
Прямоугольная система координат в пространстве задается тройкой взаимно перпендикулярных осей X, Y и Z.



Задача 1. Вычислите координаты точек C и D.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a). \qquad (1)$$



$\overrightarrow{AB}(1-1; 1-0; 1-0)$, то есть $\overrightarrow{AB}(0; 1; 1)$

Задача 2. Вычислите координаты вектора $\overrightarrow{CD}$.

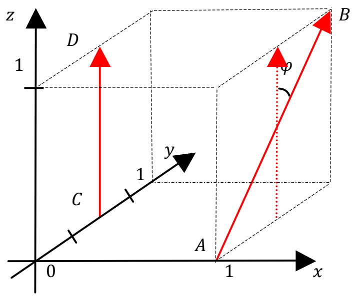
Длина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}. \qquad (2)$$

Задача 3. Вычислите длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Угол φ между векторами $\overrightarrow{AB}(x_1; y_1; z_1)$ и **$\overrightarrow{CD}(x_2; y_2; z_2)$:**

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (3)$$

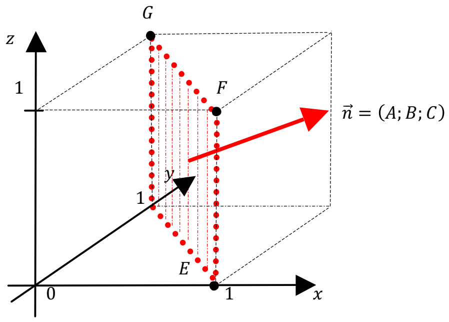


Задача 4. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где}$$

$$\vec{n} = (A; B; C) \text{ – вектор нормали.} \qquad (4)$$



Задача 5. Вычислите уравнение плоскости, проходящее через точки E, F и G.

Уравнение плоскости, проходящее через заданную точку $M(x_0; y_0; z_0)$:

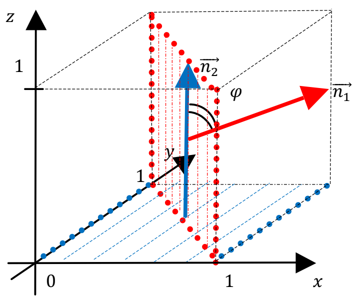
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0, \text{ где}$$

$$(x_0; y_0; z_0) \text{ – координаты точки } M. \qquad (5)$$

Угол между плоскостями – это угол между их нормалями. Рассчитывается по формуле:

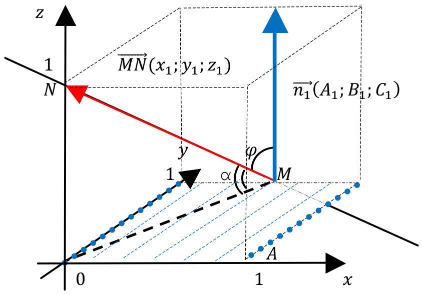
$$\cos\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \qquad (6)$$

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения плоскостей, где $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ – соответствующие векторы нормали.



Задача 6. Вычислите угол между нормалями $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$

Угол между прямой и плоскостью – это угол между любым вектором данной прямой и его проекцией на плоскость (на рисунке угол α). Известно, что угол между вектором $\overrightarrow{MN}$ и нормалью $\overrightarrow{n_1}$ находится по формуле (6).



Задача 7. Вычислите $\sin(\alpha)$ между прямой MN и плоскостью AMO.

Так как $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = \sin(\alpha)$. А значит:

$$\sin(\alpha) = \frac{|x_1 \cdot A_1 + y_1 \cdot B_1 + z_1 \cdot C_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \tag{7}$$

Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ **до плоскости** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ можно найти по формуле:

$$h = \frac{|x_0 \cdot A_1 + y_0 \cdot B_1 + z_0 \cdot C_1 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \tag{8}$$

Задача 8. Вычислите расстояние от точки $M(1;1;1)$ до плоскости $x + y + z + 1 = 0$.