

Алгебра

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение – это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a , b и c – действительные числа, причем ($a \neq 0$), а x является неизвестным.

Коэффициенты a , b и c имеют следующие названия: a – первый коэффициент, b – второй коэффициент, c – свободный член.

Если $a = 1$, то квадратное уравнение называется *приведенным*, если $a \neq 1$, то *неприведенным*.

Примеры квадратных уравнений

$$3x^2 + 6x + 13 = 0$$

$a = 3, b = 6, c = 13.$
неприведенное

$$x^2 + 5x = 0$$

$a = 1, b = 5, c = 0.$
приведенное

$$x^2 - 10x + 1 = 0$$

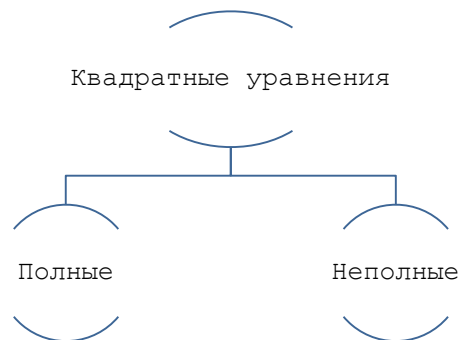
$a = 1, b = -10, c = 1.$
приведенное

$$100x^2 - 1 = 0$$

$a = 100, b = 0, c = -1.$
неприведенное

Теорема. Любое квадратное уравнение можно свести к приведенному.

Неполное квадратное уравнение – это квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$) или $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$), или $ax^2 = 0$ ($b = 0$ и $c = 0$), то есть это обычное квадратное уравнение, в котором один из коэффициентов b или c или сразу оба равны 0.



Примеры неполных квадратных уравнений

$$x^2 - 21x = 0$$

$c = 0.$

$$x^2 + 51x = 0$$

$c = 0.$

$$x^2 - 9 = 0$$

$b = 0.$

$$100x^2 = 0$$

$b = c = 0.$

Решение неполных квадратных уравнений

1. Рассмотрим решение неполных квадратных уравнений (при $b = 0$) на примерах.

а) $x^2 = 121$
 $x = \pm\sqrt{121}$
 $x = \pm 11$

б) $2x^2 - 200 = 0$
 $2x^2 = 200$
 $x^2 = 100$
 $x = \pm 10$

в) $x^2 + 9 = 0$
 $x^2 = -9$
 корней нет

г) $100x^2 = 0$
 $x^2 = 0$
 $x = 0$

2. Рассмотрим решение неполных квадратных уравнений (при $c=0$) на примерах.

$$\begin{aligned} \text{а) } x^2 - 11x &= 0 \\ x(x - 11) &= 0 \\ x = 0 \text{ или } x - 11 &= 0 \\ x = 0 \text{ или } x &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 2x^2 + 5x &= 0 \\ x(2x + 5) &= 0 \\ x = 0 \text{ или } 2x + 5 &= 0 \\ 2x &= -5 \\ x &= -2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } -x^2 &= 100x \\ -x^2 - 100x &= 0 \\ x^2 + 100x &= 0 \\ x(x + 100) &= 0 \\ x = 0 \text{ или } x &= -100 \end{aligned}$$

Решение полных квадратных уравнений

Решение полных квадратных уравнений следует проводить по следующему алгоритму:

1. Выписать коэффициенты a , b и c ;
2. Вычислить дискриминант по формуле

$$D = b^2 - 4ac;$$
3. Если дискриминант $D < 0$, то действительных корней нет, а если $D = 0$, то корень вычислить по формуле

$$x = -\frac{b}{2a};$$

4. Если дискриминант $D > 0$, то корни вычислить по формулами

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Рассмотрим решение полных квадратных уравнений на примерах.

$$\begin{aligned} \text{а) } x^2 - 11x + 10 &= 0 \\ a = 1, b = -11, c &= 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 3x^2 - 8x - 3 &= 0 \\ a = 3, b = -8, c &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } x^2 - 12x + 36 &= 0 \\ a = 1, b = -12, c &= 36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 \\ D &= 121 - 40 = 81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) \\ D &= 64 + 36 = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 \\ D &= 144 - 144 = 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-(-12)}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{11+9}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$x_1 = \frac{8+10}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x_2 = \frac{11-9}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{8-10}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$x = 6$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$