Экономические задачи

Вклады. Кредиты. Финансы

Структура задачи (17) Единого государственного экзамена по математике

Вопросы	**Частота**	**Метод**
“Вклады”	умеренно	Принцип сложных процентов
“Кредиты”	умеренно	
“Ценные бумаги”	умеренно	
иные задачи, связанные с финансовыми операциями	умеренно	Минимаксный анализ

Принцип сложных процентов

В финансовой математике существуют два принципа начисления процентов – принцип простых процентов и принцип сложных процентов. Принцип простых процентов (ППП) известен с 6 класса и трудностей не вызывает. Напомним лишь, что $q\,\%$ - это дробное число $\frac{q}{100}$. Например, $15\,\%$ - это $\frac{15}{100} = 0.15$.

В задачах на проценты удобно использовать коэффициент роста k.

$$q\,\% \longrightarrow k = 1 + \frac{q}{100}.$$

Задача 1. 1 октября 2014 года в магазине детских игрушек кукла “Маша” продается по цене 5000 рублей. Каждый месяц первого числа цена на куклу увеличивается на постоянную сумму, равную 10% от октябрьской стоимости. Сколько будет стоить кукла 1 января 2015 года?

Рассмотрим принцип сложных процентов (ПСП) на реальных примерах, но сначала освежим себе память, заглянув в 9 класс.

Пример 1. Дана последовательность чисел $2, 4, 8, 16, 32 \ldots$. Найдите сумму ее первых десяти чисел.

Решение:

Легко заметить, что каждое следующее число в 2 раза больше предыдущего. Тогда эту последовательность чисел можно представить так:

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 \ldots.$$

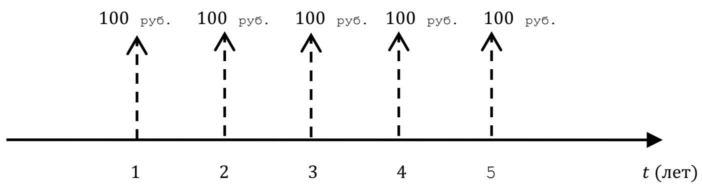
Значит искомая сумма $S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$. Как вы понимаете, это геометрическая прогрессия, а значит, сумма ее первых n членов вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Следовательно, сумма первых её десяти членов равна

$$S_{10} = \frac{2 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2046. \quad (1)$$

Пример 2. На графике изображен поток денежных взносов на открытый в банке вклад. Каждый год в банк вносится сумма равная $100\,(\text{руб.})$, а банковская годовая ставка равна $15\,(\%)$. Давайте, выясним, какая сумма будет накоплена в банке через пять лет.



Задача 2. Студент каждый год откладывает в банк 1000 рублей от своей стипендии под 12% годовых. Какую сумму банк начислит ему за 3 года, если никаких других операций с деньгами не производилось?

Решение.

Как видно из графика сумма всех взносов за 5 лет будет равна 500 руб. Но итоговая сумма окажется больше этой суммы, а все потому, что согласно ПСП банк начисляет проценты на поступающие взносы. Давайте, посмотрим, как это происходит, заполнив таблицу данными наших расчетов.

Таблица 1.

Период	**Начало периода t (руб.)**	**Начисления за период (руб.)**	**Конец периода t (руб.)**
t = 1	100	$100 \cdot 0.15$	$100 + 100 \cdot 0.15$ или $100 \cdot 1.15$ (умножение на k)
t = 2	$100 \cdot 1.15 + 100$	$(100 \cdot 1.15 + 100) \cdot 0.15$	$1.15 + 100 + (100 \cdot 1.15 + 100) \cdot 0.15$ или $(100 \cdot 1.15 + 100) \cdot 1.15$
t = 3	$(100 \cdot 1.15 + 100) \cdot 1.15 + 100$	$\big((100 \cdot 1.15 + 100) \cdot 1.15 + 100\big) \cdot 0.15$	$\big((100 \cdot 1.15 + 100) \cdot 1.15 + 100\big) \cdot 1.15$

Из таблицы 1 видно, что проценты начисляются на проценты. В этом и заключается принцип сложных процентов (ПСП). Продолжая этот процесс, на конец четвертого года получим

$$\Big(\big((100 \cdot 1.15 + 100) \cdot 1.15 + 100\big) \cdot 1.15 + 100\Big) \cdot 1.15\,.$$

На конец пятого года -

$$\bigg(\Big(\big((100 \cdot 1.15 + 100) \cdot 1.15 + 100\big) \cdot 1.15 + 100\Big) \cdot 1.15 + 100\bigg) \cdot 1.15\,.$$

Обратите внимание, что каждый раз происходит умножение на коэффициент роста k. После упрощения это выражение примет вид

$$100 \cdot 1.15 \cdot (1.15^4 + 1.15^3 + 1.15^2 + 1.15 + 1) \text{ или } 100 \cdot 1.15 \cdot \frac{1.15^5 - 1}{1.15 - 1}.$$

Итого, искомая сумма равна 775.37 рублей.

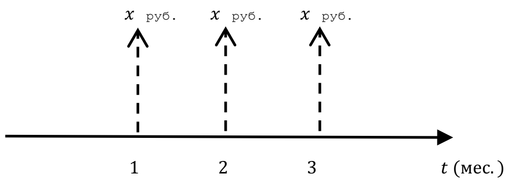
Таким образом, **накопленная сумма в банке через n лет** вычисляется по формуле:

$$S = x \cdot k \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}, \quad (2)$$

где $x\,(\text{руб.})$ – ежегодный взнос, k – коэффициент роста ($k = 1 + \frac{q}{100}$, q – банковская процентная ставка), $n\,(\text{мес. год})$ – период времени.

Замечание 1. Сегодня формула (2) используется финансовыми банками при расчете суммы денежного вклада.

Пример 3. На графике изображен поток денежных платежей за взятый в банке кредит. Каждый месяц в банк вносится сумма равная x (руб.), а банковская месячная ставка равна q (%). Давайте, выясним, какую сумму нужно вносить каждый месяц, если размер кредита равен $100\,000$ рублей, $q = 0.15$, а срок погашения 3 месяца.



Задача 3. Школьник купил в кредит телефон стоимостью $50\,000$ рублей. Какую сумму денег ему придется переплатить за покупку, если кредит нужно погасить четырьмя равными платежами, а банковская годовая ставка равна 12%?

Решение.

Выполним расчеты и представим их в таблице 2.

Таблица 2.

Период	**Начало периода** t **(руб.)**	**Начисления за период (руб.)**	**Конец периода** t **(руб.)**	**Долг перед Банком с учетом выплаты** x **(руб.)**
t = 1	100 тыс.	$100\text{ тыс.}\cdot 0.15$	$100\text{ тыс.} + 100\text{ тыс.}\cdot 0.15$ или $100\text{ тыс.}\cdot 1.15$	$100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x$
t = 2	$100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x$	$(100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x)\cdot 0.15$	$(100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x)\cdot 1.15$	$(100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x)\cdot 1.15 - x$
t = 3	$(100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x)\cdot 1.15 - x$	$\big((100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x)\cdot 1.15 - x\big)\cdot 0.15$	$\big((100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x)\cdot 1.15 - x\big)\cdot 1.15$	$\big((100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x)\cdot 1.15 - x\big)\cdot 1.15 - x$

Итак, на конец третьего года долг клиента перед банком будет равен $\big((100\text{ тыс.}\cdot 1.15 - x)\cdot 1.15 - x\big)\cdot 1.15 - x$. Упростив, получим $100\text{ тыс.}\cdot 1.15^3 - x\cdot 1.15^2 - x\cdot 1.15 - x$. Как вы понимаете, это выражение нужно приравнять к 0, ведь к концу отведенного срока кредит должен быть полностью погашен. Получим

$$100\text{ тыс.}\cdot 1.15^3 = x\cdot(1.15^2 + 1.15 + 1).$$

И снова геометрическая прогрессия, тогда сворачивая по формуле, равенство примет вид

$$100\text{ тыс.}\cdot 1.15^3 = x\cdot\frac{1.15^3 - 1}{1.15 - 1}.$$

Откуда

$$x = 100\text{ тыс.}\cdot 1.15^3\ \cdot\frac{1.15 - 1}{1.15^3 - 1} = 43\,797{,}7\text{ рублей}.$$

Таким образом, **кредит, взятый в банке на n единиц времени**, вычисляется по формуле:

$$S\cdot k^n = x\cdot\frac{k^n - 1}{k - 1}, \qquad (3)$$

где S (руб.) - размер кредита, x (руб.) – разовый платеж за кредит, k – коэффициент роста, n (мес., год) – срок погашения.

Формулу (3) можно преобразовать к виду (4):

$$x = S\cdot\frac{k - 1}{1 - k^{-n}}. \qquad (4)$$

Замечание 2. Сегодня формула (4) используется всеми банками при расчете разового платежа x по кредиту или ипотеке размера S.

Минимаксный анализ

В задании 17 ЕГЭ по математике встречаются задачи, в которых экономические явления могут быть описаны математическими функциями. Описанные функции весьма поддаются исследованию с помощью производной. Само же исследование функции связано с нахождением её *точек экстремума* (*точек максимума, точек минимума*), её *наибольшего и наименьшего значений*. Такое исследование носит название *минимаксный анализ*. Рассмотрим несколько примеров.

> **Задача 4.** Найдите точки экстремума, наименьшее и наибольшее значения функции
> $$f(x) = x^3 - 48x$$

Пример 4. Годовая прибыль в млн рублей от продажи x тысяч единиц продукции при цене p тысяч рублей за единицу описывается функцией $f(x) = -\frac{x^2}{2} + (p-1)x - 7$. При каком наименьшем значении p через пять лет суммарная прибыль составит не менее 215 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается функцией

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + (p-1)x - 7.$$

Эта функция является квадратичной с параметром p. Исследуем функцию с помощью производной. Её производная по x равна

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot 2\,x + (p-1).$$

Найдем её точки экстремума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + (p-1) = 0.$$

Откуда $x = p-1$. Так как ветви графика $f(x)$ направлены вниз $\left(a = -\frac{1}{2}\right)$, то единственная точка экстремума является точкой максимума, а значит $f(x)$ в этой точке достигает своего наибольшего значения, то есть при $x = p-1$. Вычислим значение

$$f(p-1) = -\frac{1}{2}\cdot\ (p-1)^2 + (p-1)(p-1) - 7 = \frac{(p-1)^2}{2} - 7.$$

Данная функция зависит от цены p и выражает наибольшую годовую прибыль. В задаче сказано, что за пять лет суммарная прибыль должна составить не менее 215 млн рублей. Получим

$$5\cdot\left(\frac{(p-1)^2}{2} - 7\right) \geq 215 \Leftrightarrow (p-1)^2 \geq 100 \Leftrightarrow (p-11)(p+9) \geq 0.$$

Откуда $p \geq 11$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшая цена составляет 11 тысяч рублей.

Пример 5. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человека. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ рублей. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $3t^2$ у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у.е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение.

Пусть x рабочих будет направлено на первый объект, тогда на второй объект будет направлено $(24-x)$. Их суточные зарплаты будут соответственно равны $4x^2$ и $3\,(24-x)^2$. В день начальник будет должен платить рабочим $4x^2+3\,(24-x)^2$.

Обозначим это выражение через $f(x)$. Её производная по x равна

$$f'(x)=8x+3\cdot 2\cdot\,(24-x)^{2-1}\cdot(-1)$$

или

$$f'(x)=14x-144.$$

Найдем её точки экстремума:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 14x-144=0.$$

Откуда $x=\frac{72}{7}$. Значит $f(x)$ достигает своего наименьшего значения при $x=\frac{72}{7}\approx 10{,}3$. Так как x - это количество рабочих (то есть натуральное число), то исследуемая функция достигает своего наименьшего значения в точке $x=10$ или $x=11$. Найдем и сравним эти значения:

$$f(10)=\ 4\cdot 10^2+3\cdot\ (24-10)^2=400+3\cdot 196=988,$$
$$f(11)=\ 4\cdot 11^2+3\cdot\ (24-11)^2=484+3\cdot 169=991.$$

Таким образом, исследуемая функция $f(x)$ на множестве натуральных чисел достигает своего наменьшего значения в точке $x=10$. Поэтому необходимо направить 10 рабочих на первый объект, 14 рабочих – на второй объект. Зарплата составит 988 у.е.

Экономические задачи

1. **(досрочный ЕГЭ, 2018)** В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
 - каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом чат ь долга.
 Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено $311\,040$ рублей?

2. **(ЕГЭ, 2017)** Пенсионнный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1, 2, \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

3. **(ЕГЭ, 2017)** Дмитрий взял кредит в банке на сумму 270200 рублей. Схема выплат такова: в конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% оставшуюся сумму долга, а затем Дмитрий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Дмитрий погасил кредит за три года, причём каждый его следующий платеж был равен ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Дмитрий заплатил в первый раз?

4. **(ЕГЭ, 2016)** Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет на x млн рублей, x – **целое** число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

5. **(ЕГЭ, 2016)** Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме того, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

6. **(ЕГЭ, 2016)** 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
 - 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r - **целое** число;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07

Долг (млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

7. **(ЕГЭ, 2016)** В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S - **целое** число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с января по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

8. **(ЕГЭ, 2016)** В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным S тыс. рублей;
- выплаты 2020 и 2021 годов равны по 360 тыс. рублей;
- к июлю 2021 года долг будет полностью выплачен.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

9. **(ЕГЭ, 2016)** В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты составили млн рублей.

10. **(ЕГЭ, 2015)** Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении р строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

11. **(ЕГЭ, 2015)** Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

12. **(МИОО, 2015)** Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

13. **(досрочный ЕГЭ, 2015)** 31 декабря 2013 года Сергей взял кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк $53\,240$ рублей. Сергей выплатил долг тремя равными платежами. Какова сумма, взятая Сергеем в долг?

14. **(досрочный ЕГЭ, 2015)** Каждый год 1 сентября, начиная с 2011 года, гражданин Васильев вкладывает в банк некоторую сумму денег (каждый год одну и ту же) под 10% годовых. Годовые начисляются 1 раз в год 31 августа на всю сумму вклада. Какую сумму вкладывает Васильев ежегодно, если к окончанию дня 31 августа 2014 г на счету Васильева было $72\,820$ рублей? Предполагается, что никаких финансовых операций, кроме указанных выше, не производилось.

15. **(досрочный ЕГЭ, 2015)** Каждый год 1 октября, начиная с 2011 г, гражданин Фёдоров вкладывает в банк некоторую сумму денег (каждый год одну и ту же) под 20% годовых. Годовые начисляются 1 раз в год 30 сентября на всю сумму вклада. Какую сумму вкладывает Фёдоров ежегодно, если к окончанию дня 30 сентября 2014 г на счету Фёдорова было $109\,200$ рублей? Предполагается, что никаких финансовых операций, кроме указанных выше, не производилось.

16. **(досрочный ЕГЭ, 2015)** Гражданин Антонов 1 февраля 2012 года положил в банк некоторую сумму денег, кратную 1000 рублей, под 10% годовых. После этого он ежегодно (начиная с 2013 года) 1 февраля снимал по $100\,000$ рублей, при этом на его счёте и по сей день сохранилась некоторая сумма. Какую наименьшую сумму Антонов мог положить в 2012 году? Предполагается, что банк начисляет процент на остаток вклада один раз в год 31 января; других финансовых операций со счётом Антонова не производилось.

17. **(досрочный ЕГЭ, 2015)** Гражданин Ефимов 1 февраля 2012 года положил в банк некоторую сумму денег, кратную 1000 рублей, под 20% годовых. После этого он ежегодно (начиная с 2013 года) 1 февраля снимал по $50\,000$ рублей, при этом на

его счёте и по сей день сохранилась некоторая сумма. Какую наименьшую сумму Ефимов мог положить в 2012 году? Предполагается, что банк начисляет процент на остаток вклада один раз в год 31 января; других финансовых операций со счётом Ефимова не производилось.

18. **(тренировочная работа №88, www.alexlarin.net)** В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составляла $x\%$ годовых, тогда как в январе 2001 года – $y\%$ годовых, причем известно, что $x+y=30\%$. В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

19. Имеется три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. рублей до 20 тыс. рублей, а цена акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. рублей и не больше 60 тыс. рублей. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

20. **(пробный ЕГЭ, Москва 2015, №18.С5 №506959)** Баба Валя, накопив часть своей пенсии, решила улучшить свое материальное положение. Она узнала, что в Сбербанке от пенсионеров принимают вклады под определенный процент годовых, и на этих условиях внесла свои сбережения в ближайшее отделение. Но через некоторое время соседка ей рассказала, что недалеко от той местности, где проживают пенсионеры, есть коммерческий банк, где процент годовых для пенсионеров-вкладчиков в 20 раз выше, чем в Сбербанке. Баба Валя не доверяла коммерческим банкам, но стремление улучшить свое материальное положение взяло верх. После долгих колебаний и ровно через год после открытия счета в Сбербанке баба Валя сняла половину образовавшей суммы от ее вклада, заявив: «Такой навар меня не устраивает!» И открыла счет в том коммерческом банке, о котором говорила ее соседка. Через год сумма бабы Вали в коммерческом банке превысила ее первоначальные кровные сбережения на 65%. Сожалела баба Валя, что год назад в Сбербанке сняла не всю сумму, а лишь половину, однако подумала: «А где же мы не теряли?..» Гендиректор коммерческого банка оказался хорошим: не оставил бабу Валю без навара! А каков в Сбербанке процент годовых для пенсионеров?