Математика ЕГЭ

Неравенства с одной переменной

Предисловие

К повышенному уровню сложности ЕГЭ по математике относится задание с развернутым ответом под номером 15. В этом задании школьнику предлагается решить неравенство. К сожалению, как показывает статистика прошлых лет, с неравенством справляется не более 10% всех участников экзамена. Метод интервалов, метод замены переменной, метод рационализации – вот неполный список математических методов, который формирует нужный “фундамент” для успешного выполнения 15-го задания. В этом пособии ученик научится применять все перечисленные методы на актуальных примерах, а в конце пособия ему будут даны комплексы упражнений на закрепление каждой темы.

Структура задачи 15 Единого Государственного Экзамена по математике

Неравенства	**Частота**	**Методы**
рациональные	редко	метод интервалов, метод замены, метод рационализации
показательные	умеренно	
логарифмические	часто	
смешанные или комбинированные	редко	

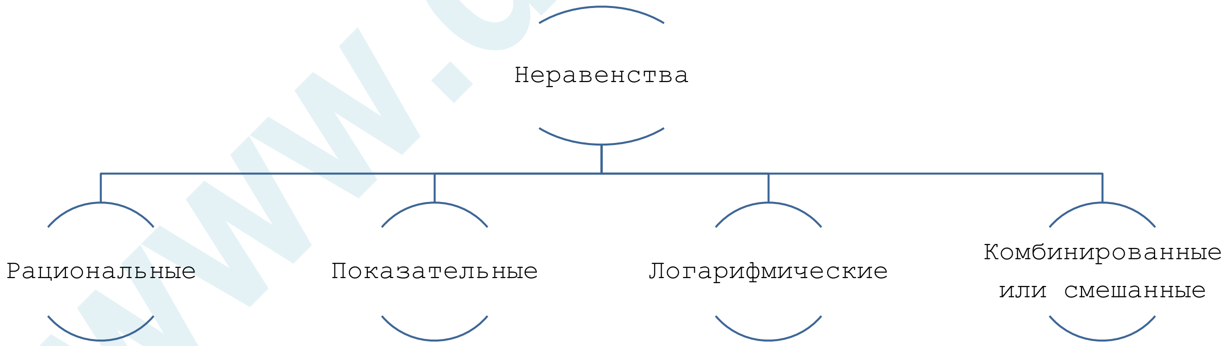


Рис.1 Типы неравенств

Итак, все неравенства 15-го задания ЕГЭ по математике можно представить следующей схемой (см. рисунок 1). Рациональные неравенства легко решаются методом интервалов, а все остальные типы неравенств (показательные, логарифмические и смешанные) сводятся к ним. Для сведения к рациональным неравенствам используют различные методы, о которых вам и предстоит узнать в этом пособии. Желаю успехов в изучении!

СОДЕРЖАНИЕ

Самыми простейшими неравенствами с одной переменой являются *линейные неравенства*. Разберем несколько примеров.

Пример 1. Решите неравенство

$$5 - 2x > 0. \quad (1)$$

Решение.

Линейное неравенство (1) решается очень просто. Вот последовательность действий:

$$5 - 2x > 0;$$

$$5 > 2x;$$

$$2{,}5 > x \text{ или } x < 2{,}5.$$

Как видите, чтобы решить линейное неравенство достаточно отделить переменную x от известной части. Если же говорить на языке функции, то любое неравенство можно решить исследуя функцию. А где же здесь функция, спросите вы? Пусть правая часть $5 - 2x$ неравенства (1) и будет функцией, скажем $f(x)$. Изучим функцию $f(x) = 5 - 2x$ и ответим на вопрос: при каких значениях x функция $f(x)$ принимает положительные значения?

Линейная функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси, а в точке $x = 2{,}5$ обращается в 0, то есть $f(2{,}5) = 0$. При переходе через $2{,}5$ функция $f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус (см. рисунок 2).

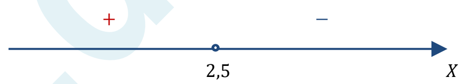


Рис. 2. Знаки функции $f(x) = 5 - 2x$

Согласно этой схеме функция $f(x)$ принимает положительные значения при $x < 2{,}5$, что совпадает с ранее найденным решением.

Ответ: $x < 2{,}5$ или $x \in (-\infty; 2{,}5)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$5 + 3x \leq 0. \quad (2)$$

Решение.

Решение неравенства (2) очевидно. По шагам:

$$5 + 3x \leq 0;$$

$$3x \leq -5;$$

$$x \le -5/3 \text{ или } x \le -1\frac{2}{3}.$$

Решая через функцию, обозначим левую часть неравенства через $f(x)$. Смена знака представлена графической схемой на рисунке 3, а значит решение неравенства (2):

$$x \le -5/3 \text{ или } x \in \left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right].$$

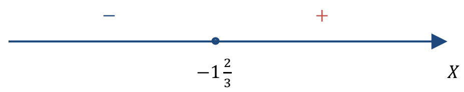


Рис. 3. Расстановка знаков $f(x) = 5 + 3x$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right]$.

Мы разобрали два простейших примера, где в каждом использовали два способа решения – числовой и функциональный. Каким же способом нужно решать линейные неравенства? Ответ очень простой - решать линейные неравенства рационально числовым способом (отделяя x от известной части, не прибегая к понятию функции).

Далее давайте разберем примеры более сложных неравенств, решать которые следует функциональным способом, то есть через функцию. И вторыми по уровню сложности являются, конечно, *квадратные неравенства*.

Пример 3. Решите квадратное неравенство

$$x^2 - 5x \le 0. \qquad (3)$$

Решение.

Решить квадратное неравенство (3) легче всего через функцию. Пусть $f(x) = x^2 - 5x$. Найдем нули этой функции, для чего $f(x)$ приравнивается к 0. Корнями квадратного уравнения являются числа 0 и 5 (это и есть нули функции). Вот последовательность действий:

$$x^2 - 5x = 0;$$

$$x(x-5) = 0;$$

$$x = 0, \ x = 5.$$

Квадратичная функция $f(x)$ обращается в 0 при $x = 0$ и $x = 5$. При переходе (слева направо) через $x = 0$ функция меняет свой знак с плюса на минус, а при $x = 5$ - с минуса на плюс (см. рисунок 4).

Рис. 4. Расстановка знаков $f(x) = x^2 - 5x$

При каких значениях x функция $f(x)$ принимает отрицательные значения ($f(x) \le 0$)? Ответ получаем из рисунка 4: при $x \in [0; 5]$.

Ответ: $x \in [0; 5]$.

Пример 4. Решите неравенство

$$1 - 2x - x^2 > 0. \qquad (4)$$

Решение.

Пусть $f(x) = 1 - 2x - x^2$. При $f(x) = 0$, получим нули $1 - \sqrt{3}$ и $1 + \sqrt{3}$. Отметим их на числовой оси открытами точками и расставим знаки функции. Осталось выбрать промежуток, который удовлетворяет неравенству (4) и записать ответ.

Рис. 5. Расстановка знаков $f(x) = 1 - 2x - x^2$

Ответ: $x \in \left(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\right)$

Пример 5. Решите неравенство

$$x^2 - 4x + 4 < 0. \qquad (5)$$

Решение.

Итак, $f(x) = x^2 - 4x + 4$. При $f(x) = 0$, получим только один корень равный 2. Отметим его на числовой оси (см. рисунок 6). В этом случае функция $f(x)$ по обе стороны числа 2 принимает значения со знаком плюс. Осталось выбрать промежуток, который удовлетворяет неравенству (5) и записать ответ. Но такого промежутка просто нет, так как функция $f(x)$ принимает только положительные значения и значение 0 при $x = 2$. Значит отрицательных значений просто нет.

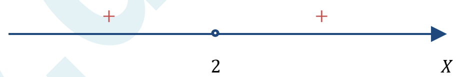


Рис. 6. Расстановка знаков $f(x) = x^2 - 4x + 4$

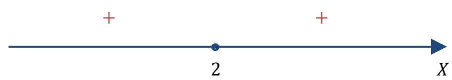
Ответ: $x = \emptyset$.

Пример 6. Решите неравенство

$$x^2 - 4x + 4 \le 0. \qquad (6)$$

Решение.

Неравенство (6) отличается от неравенства (5) лишь нестрогим знаком. В этом случае $x = 2$ следует отметить закрашенной точкой. При каких значениях x функция $f(x)$ принимает отрицательные значения и значение 0? Отрицательных значений функция не принимает, зато при $x = 2$ функция принимает значение 0, что и будет является решением неравенства.



Ответ: $x = 2$.

Пример 7. Решите неравенство

$$x^2 + 4x + 5 > 0. \qquad (7)$$

Решение.

Итак, $f(x) = x^2 + 4x + 5$. У данной функции нет нулей (ведь $D < 0$), а значит и отмечать на числовой оси ничего не нужно. Сама функция $f(x)$ на числовой оси принимает только положительные значения, тогда отметим всю числовую ось X знаком плюс. Остается выбрать промежуток, который удовлетворяет неравенству $f(x) > 0$. Ответом неравенства (7) является вся числовая ось.

Рис. 7. Расстановка знаков $f(x) = x^2 + 4x + 5$

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$x^2 + 4x + 5 < 0. \qquad (8)$$

Решение.

Как и в примере (7) на числовой оси ничего отмечать не нужно. Функция $f(x)$ положительна всюду. А вот с выбором промежутка все просто - здесь $x = \emptyset$, так как нет ни одного значения x, которое бы удовлетворяло неравенству $f(x) < 0$ (см. рисунок 7).

Ответ: $x = \emptyset$.

Таким образом, в первом параграфе мы проделали путь от простейших неравенств к квадратным. Простейшие, то есть линейные неравенства рационально решать числовым способом подобно тому как решают линейные уравнения, а вот квадратные неравенства следует решать через функцию или *методом интервалов*, о котором вы более подробно узнаете в следующем параграфе.

§2 Метод интервалов

В первом параграфе для решения квадратных неравенств фактически был использован метод интервалов. Пришло время описать его полный алгоритм.

Алгоритм применения метода интервалов

1. Любое неравенство приводим к виду

$$f(x) \vee 0,$$

здесь $f(x)$ - рациональная функция, а "$\vee$" – один из возможных знаков неравенства (">" – больше, "$<$" – меньше, "$\leq$" - меньше или равно, "$\geq$" - больше или равно).

Примеры: $x^4 - 1 \leq 0$, $\frac{1}{x}>0$, $\frac{x^2}{x-1}>0$.

2. Находим *нули функции* $f(x)$, решая уравнение

$$f(x) = 0.$$

Находим корни такого уравнения. Если $f(x)$ - рациональная дробь, то отдельно находим *нули числителя* и *знаменателя*. Нулей может и не быть - раз нет корней такого уравнения (см. примеры (7) и (8)).

3. На числовой оси X отмечаем нули числителя и знаменателя. Нули знаменателя отмечаем *выколотыми точками*. Нули числителя отмечаем *выколотыми*, если неравенство строгое или *закрашенными* - если неравенство нестрогое. Если нет нулей – то ничего не отмечаем (см. примеры (7) и (8)).

4. Все нули функции разделяют числовую ось X на *промежутки (интервалы)*. Выбрав любое число любого промежутка расставим чередующиеся знаки. Если какой-нибудь из нулей находится в четной степени, то такой нуль следует отметить *замкнутой петлёй* и поставить свой знак.

5. Выбираем промежутки, удовлетворяющие неравенству $f(x) \vee 0$ (закрашиваем штриховкой). Обратите внимание на нули с замкнутыми петлями (если таковы имеются): если нуль с замкнутой петлей внутри промежутка решения, то он является частным решением; если такой нуль оказался вне промежутка решения, то он также является частным решением и его нужно включить в общее решение. Собираем все промежутки и записываем ответ.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{1}{x} > 0. \qquad (9)$$

Решение.

На рисунке 8 представлена расстановка знаков функции $f(x) = \frac{1}{x}$: при $x < 0$, функция принимает отрицательные значения; при $x > 0$, функция принимает положительные значения, а при $x = 0$ функция не определена (отмечаем выколотой точкой). Ответ неравенства (9) очевиден.

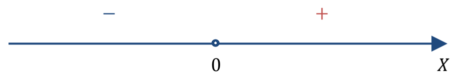


Рис. 8. Расстановка знаков $f(x) = \frac{1}{x}$

Ответ: $x \in (0; +\infty)$.

Пример 10. Решите неравенство

$$x - \frac{1}{x} < 0. \qquad (10)$$

Решение.

Неравенство (10) почти соответствует виду $f(x) \vee 0$. Сведём разность $x - \frac{1}{x}$ к общей дроби:

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}.$$

Теперь очевидно, что $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ будет рациональной функцией (вообще, разность или сумма рациональных функций есть функция рациональная). Итак, имеем неравенство:

$$\frac{x^2-1}{x} < 0. \qquad (11)$$

Найдем нули числителя и знаменателя:

$$\frac{x^2-1}{x} = 0.$$

1) Нули числителя: $x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$ и $x_2 = -1$;

2) Нули знаменателя: $x \neq 0 \Rightarrow \; x_3 = 0$.

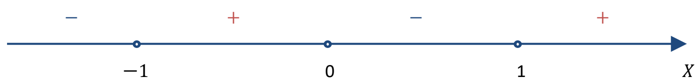


Рис. 9. Расстановка знаков $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

Согласно неравенству (11) закрашиваем штриховкой только те интервалы, которые отмечены знаком минус. Записываем ответ, объединяя интервалы.

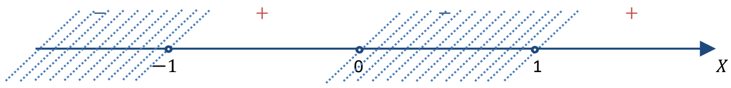


Рис. 10. Штриховка нужных интервалов

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Пример 11. Решите неравенство

$$x - \frac{1}{x^2} \leq 0. \qquad (12)$$

Решение.

Неравенство (12) почти соответствует виду $f(x) \vee 0$. Приведем разность $x - \frac{1}{x^2}$ к общей дроби

$$x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

Откуда $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ будет рациональной фукцией. Найдем нули числителя и знаменателя:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2} = 0.$$

1) Нули числителя: $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$;
2) Нули знаменателя: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0$ – корень второй степени.

Рис. 11. Расстановка знаков $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$

На числовой оси X ноль числителя отмечаем закрашенной точкой, ноль знаменателя следует отметить выколотой точкой и изобразить замкнутую петлю, а расставлять знаки с учетом этой петли. Согласно решаемому неравенству закрашиваем штриховкой интервалы отмеченные знаком минус. Записываем ответ, объединяя два интервала.

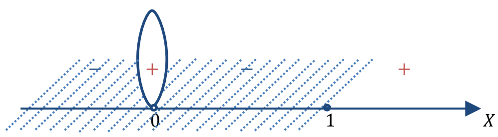


Рис. 12. Штриховка нужных интервалов $f(x) \leq 0$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

Пример 12. Решите неравенство

$$x - \frac{2}{x+1} > 0. \qquad (13)$$

Решение.

Приведём разность $x - \frac{2}{x+1}$ к общей дроби:

$$x - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2+x}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2+x-2}{x+1}.$$

Получим $\frac{x^2+x-2}{x+1}$. Обозначим её через $f(x)$. Найдем нули рациональной функции $f(x)$:

$$\frac{x^2+x-2}{x+1}=0.$$

1) Нули числителя: $x^2+x-2=0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x+2)=0 \;\Rightarrow\; x_1=1$ и $x_2=-2$;
2) Нули знаменателя: $x+1\neq 0 \Rightarrow\; x_3=-1$.

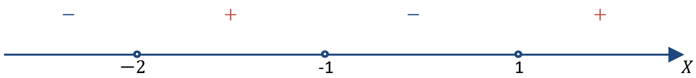


Рис. 13. Знаки функции $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x+1}$

На рисунке 13 отмечены выколотыми точками три нуля функции $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x+1}$. Согласно неравенству $f(x)>0$ закрашиваем штриховкой интервалы отмеченные знаком плюс. Записываем ответ, объединяя интервалы.

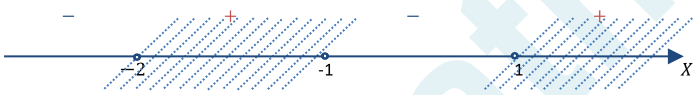


Рис. 14. Штриховка нужных интервалов $f(x)>0$

Ответ: $x\in(-2;-1)\cup(1;+\infty)$.

Пример 13. Решите неравенство

$$\frac{2x-7}{x+1}>0. \tag{14}$$

Решение.
Найдем нули функции $f(x)=\frac{2x-7}{3+x}$:

$$\frac{2x-7}{3+x}=0.$$

1) Нули числителя: $2x-7=0 \;\Rightarrow\; x_1=3{,}5$;
2) Нули знаменателя: $3+x\neq 0 \Rightarrow\; x_2=-3$.

Рис. 15. Знаки функции $f(x)=\frac{2x-7}{3+x}$

Заштриховать и выбрать нужные интервалы большого труда не составить, и поэтому выбрать ответ вам предоставляется самостоятельно.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup[3{,}5;+\infty)$.

Пример 14. Решите неравенство

$$(1-2x)(4-5x)(1+5x)^2<0. \tag{15}$$

Решение.

Найдем нули функции $f(x) = (1-2x)(4-5x)(1+5x)^2$. Нули функции $f(x) = 0$:

$$1 - 2x = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 0{,}5;$$

$$4 - 5x = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 0{,}8;$$

$$1 + 5x = 0 \ \Rightarrow \ x_3 = -0{,}2 \text{ – корень четной степени.}$$

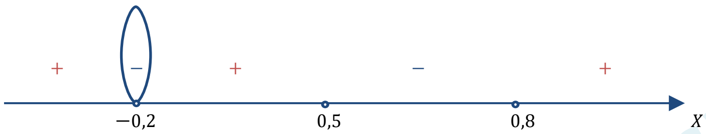


Рис. 16. Знаки функции $f(x) = (1-2x)(4-5x)(1+5x)^2$

На рисунке 16 отмечены три нуля функции, причем в одном из них следует изобразить замкнутую петлю. Согласно неравенству (15) закрашиваем штриховкой интервалы отмеченные знаком минус – но здесь он один такой, точка $x = -0{,}2$ не является решением, так как выколота. Записываем ответ.

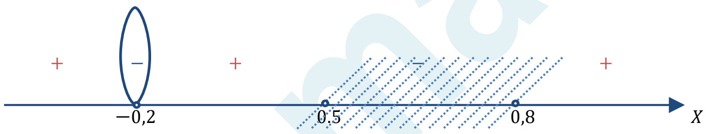


Рис. 17. Знаки функции $f(x) = (1-2x)(4-5x)(1+5x)^2$

Ответ: $x \in (0{,}5; 0{,}8)$.

Пример 15. Решите неравенство

$$\frac{(x^2-x-6)(1+x)^4}{(4+x)^2} < 0. \qquad (16)$$

Решение.

Найдем нули функции $f(x) = \frac{(x^2-x-6)(1+x)^2}{(4+x)^2}$.

1) Нули числителя:

$$x^2 - x - 6 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -2;$$

$$(1+x)^4 = 0 \ \Rightarrow \ x_3 = -1 \text{ – корень четной степени.}$$

2) Нули знаменателя: $(4+x)^2 \neq 0 \Rightarrow x_4 = -4$ – корень четной степени.

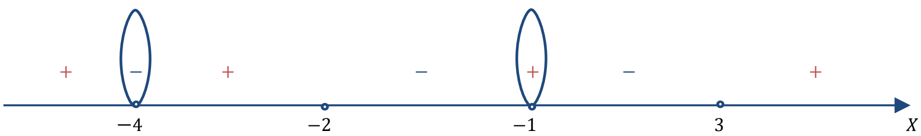


Рис. 18. Знаки функции $f(x) = \frac{(x^2-x-6)(1+x)^4}{(4+x)^2}$

На числовой прямой X отмечаем три нули числителя и один знаменателя, из которых в двух следует изобразить по замкнутой петле (в тех нулях, которые в четной степени). Все нули выколоты. Согласно неравенству (16) закрашиваем штриховкой интервалы отмеченные знаком минус ($x = -4$ и $x = -1$ не являются решением). Записываем ответ.

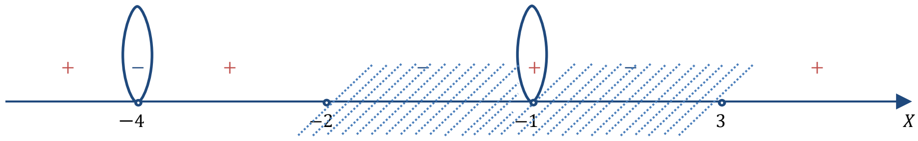


Рис. 19. Знаки функции $f(x) = \frac{(x^2-x-6)(1+x)^4}{(4+x)^2}$

Ответ: $x \in (-2;-1) \cup (-1;3)$.

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{(x^2-x-6)(x^2-2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} \geq 0. \tag{17}$$

Решение.

Упростим правую часть $\frac{(x^2-x-6)(x^2-2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} = \frac{(x-3)(x+2)(x+1)(x-3)}{((x+1)(x-4))^2} = \frac{(x+2)(x+1)(x-3)^2}{(x+1)^2(x-4)^2}$, а после сокращения получим $\frac{(x+2)(x-3)^2}{(x+1)(x-4)^2}$. Имеем рациональную функцию $f(x) = \frac{(x+2)(x-3)^2}{(x+1)(x-4)^2}$.

1) Нули числителя:

$$(x+2)(x-3)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -2 \text{ и } x_2 = 3 \text{ – корень четной степени.}$$

2) Нули знаменателя:

$$(x+1)(x-4)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = -1 \text{ и } x_4 = 4 \text{ – корень четной степени;}$$

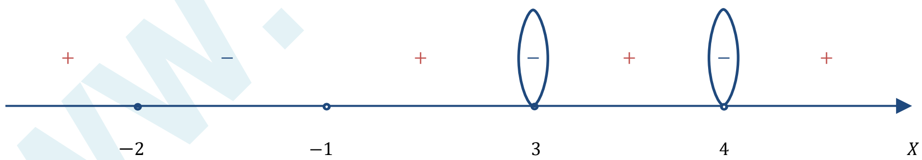


Рис. 20. Знаки функции $f(x) = \frac{(x+2)(x-3)^2}{(x+1)(x-4)^2}$

В нашем случае имеем два нуля четной степени, а это значит, что изображаем две замкнутые петли, как это уже было в примере 15. Два нуля закрашены, а два другие выколоты. Согласно неравенству (17) закрашиваем штриховкой интервалы отмеченные знаком плюс ($x = -4$ не является решением). Записываем ответ.

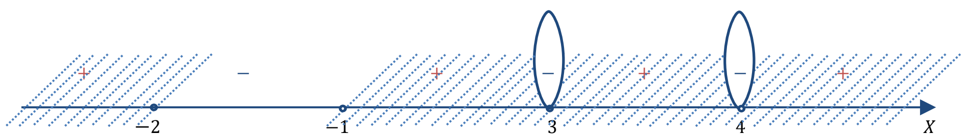


Рис. 21. Штриховка нужных интервалов $f(x) \geq 0$

Ответ: $x \in (-\infty;-2] \cup (-1;4) \cup (4;+\infty)$.

Пример 17. Решите неравенство

$$\frac{x^3-2x^2+3x}{x^2+x-1} \leq 0. \qquad (18)$$

Решение.

Преобразуем правую часть $\frac{x^3-2x^2+3x}{x^2+x-1} = \frac{x(x^2-2x+3)}{x^2+x-1}$. Откуда $f(x) = \frac{x(x^2-2x+3)}{x^2+x-1}$.

1) Нули числителя:

$$x(x^2-2x+3) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \text{ и } x^2-2x+3 \neq 0;$$

2) Нули знаменателя:

$$x^2+x-1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ и } x_3 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2};$$

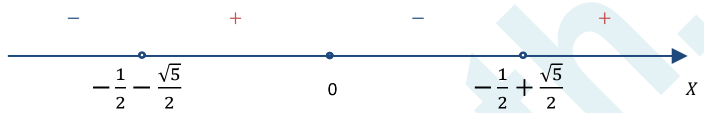


Рис. 22. Знаки функции $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

Квадратный трехчлен x^2-2x+3 всегда положителен, что говорит о том, что решение неравенства (18) никак не зависит от положительной величины x^2-2x+3, а значит этим квадратным трехчленом можно просто пренебречь. Сохраняя знак неравенства, выполним переход к равносильному неравенству:

$$\frac{x}{x^2+x-1} \leq 0. \qquad (19)$$

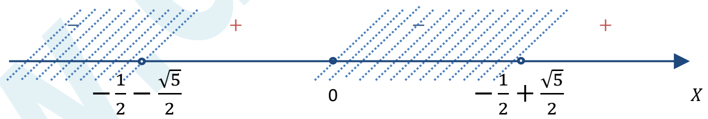


Рис. 23. Штриховка нужных интервалов $f(x) = \frac{x}{x^2+x-1}$

Ответ неравенства (19) заштрихован на рисунке 23.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup [0; -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Пример 18. Решите неравенство

$$1-\frac{x}{x-1} \leq 0. \qquad (20)$$

Решение.

Как вы уже поняли, если неравенство содержит разность, сумму и даже произведение двух и более рациональных функции, то согласно методу интервалов важно привести к виду $f(x) \vee 0$. Именно с этого и следует применять метод интервалов.

Поэтому преобразуем левую часть неравенства (20), получим:

$$1-\frac{x}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{-1}{x-1},\ \text{то есть}$$

$$\frac{-1}{x-1}\leq 0$$

или

$$\frac{1}{x-1}\geq 0. \qquad (21)$$

Откуда обозначим рациональную функцию $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Исследуем её:

1) Нулей числителя нет;
2) Нули знаменателя:

$$x-1\neq 0\ \Rightarrow\ x_1=1.$$

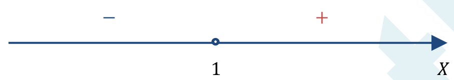


Рис. 24. Знаки функции $f(x)=\frac{1}{x-1}$

Ответ для неравенства (21) также очевиден (см. рисунок 24).

Ответ: $x\in(1;+\infty)$.

§3 Показательные неравенства

В основе показательных неравенств лежит *показательная функция*. *Показательная функция* – это функция вида $f(x)=a^x$, где a - некоторое число, а x – независимая переменная. Если знать свойства такой функции, то можно научиться решать показательные неравенства, а в остальном такие неравенства сводятся к рациональным, которые, как известно, рационально решаются методом интервалов. Разберем несколько типовых примеров.

Пример 19. Решите неравенство

$$2^x \le 256. \tag{22}$$

Решение.

Известно, что $256=2^8$, тогда получим:

$$2^x \le 2^8$$

или

$$x \le 8.$$

Ответ: $x \in (-\infty;8]$.

Пример 20. Решите неравенство

$$9^x \le \frac{1}{243}. \tag{23}$$

Решение.

Заметим, что $\frac{1}{243}=3^{-5}$ и $9=3^2$. Неравенство (23) принимает вид:

$$(3^2)^x \le 3^{-5}$$

или

$$3^{2x} \le 3^{-5}.$$

Откуда

$$2x \le -5 \Rightarrow x \le -2{,}5.$$

Ответ: $x \in (-\infty;-2{,}5]$.

Пример 21. Решите неравенство

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \le 0{,}216. \tag{24}$$

Решение.

Здесь $0{,}216=\frac{216}{1000}=\frac{6^3}{10^3}=\left(\frac{6}{10}\right)^3=\left(\frac{3}{5}\right)^3$, а значит неравенство (24) принимает вид:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \le \left(\frac{3}{5}\right)^3.$$

Откуда $x \ge 3$, так как показательная функция $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ убывает на всей числовой оси.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

Пример 22. Решите неравенство

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0. \quad (25)$$

Решение.

Неравенство (25) следует решать путем замены. Пусть $t = 3^x$, тогда

$$(t)^2 = t^2 = (3^x)^2 = 3^{2x}.$$

После подстановки получим неравенство

$$t^2 - 4t + 3 \leq 0. \quad (26)$$

А после преобразования левой части получим

$$(t-1)(t-3) \leq 0.$$

Решая квадратное неравенство методом интервалов, легко заключить $1 \leq t \leq 3$. Сделаем обратную замену: $1 \leq 3^x \leq 3$. Откуда $3^0 \leq 3^x \leq 3^1$, а значит $0 \leq x \leq 1$ или $x \in [0; 1]$.

Ответ: $x \in [0; 1]$.

Пример 23. Решите неравенство

$$6 \cdot 3^{2x} + 2^{1+2x} > 7 \cdot 6^x. \quad (27)$$

Решение.

Согласно свойствам степеней $2^{1+2x} = 2 \cdot 2^{2x}$ и $6^x = 2^x \cdot 3^x$. Поделим обе части неравенства на 3^{2x} $(3^{2x} \neq 0)$, получим

$$\frac{6 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2 \cdot 2^{2x}}{3^{2x}} > \frac{7 \cdot 2^x \cdot 3^x}{3^{2x}}.$$

После сокращений

$$6 + 2 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} > \frac{7 \cdot 2^x}{3^2} \text{ или } 6 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} > 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Пусть $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, тогда

$$2t^2 - 7t + 6 > 0.$$

Далее решая методом интервалов, получим $\frac{3}{2} < t < 2$. Сделаем обратную замену:

$$\frac{3}{2} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 2.$$

Откуда $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^{log_{\frac{2}{3}}2}$, а значит $log_{\frac{2}{3}}2 < x < -1$ или $x \in \left(log_{\frac{2}{3}}2; -1\right)$.

Ответ: $x \in \left(log_{\frac{2}{3}}2; -1\right)$.

Пример 24. Решите неравенство

$$\frac{1}{2^x-1} \leq \frac{1}{2^{x+1}-1}. \tag{28}$$

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда получим

$$\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{2t-1}.$$

После переноса и приведения к общему знаменателю

$$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2t-1} \leq 0 \quad \text{или} \quad \frac{t}{(t-1)(2t-1)} \leq 0.$$

Откуда $f(t) = \frac{t}{(t-1)(2t-1)}$. Исследуем функцию $f(t)$:

1) Нули числителя: $t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$;

2) Нули знаменателя: $(t-1)(2t-1) = 0 \Rightarrow t_2 = 1$ и $t_3 = \frac{1}{2}$.

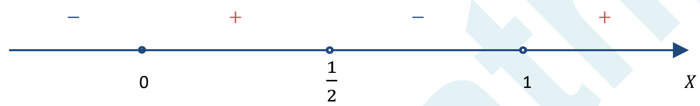


Рис. 25. Знаки функции $f(t) = \frac{t}{(t-1)(2t-1)}$

Согласно методу интервалов (см. рисунок 25) получим $t \leq 0$ и $\frac{1}{2} < t < 1$. Запишем это в виде объединения двух интервалов:

$$\left[\begin{array}{l} t \leq 0, \\ \dfrac{1}{2} < t < 1. \end{array}\right.$$

После обратной замены:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x \leq 0, \\ \dfrac{1}{2} < 2^x < 1. \end{array}\right.$$

Так как функция $f(x) = 2^x$ возрастает на всей числовой оси, то для первого случая заключаем, что $x = \emptyset$, а для второго:

$$2^{-1} < 2^x < 2^0.$$

Ответ очевиден.

Ответ: $x \in (-1; 0)$.

§4 Логарифмические неравенства

Если в основе показательных неравенств лежит показательная функция, то в основе логарифмических, как вы можете догадываться, – логарифмическая. *Логарифмическая функция* – это функция вида $f(x) = log_a x$, где a – некоторое число, а x – независимая переменная. По определению логарифма $x > 0$ и $0 < a$, $a \neq 1$. Ниже представлены некоторые свойства логарифмов (для всех $a, b, c > 0$ и $c \neq 1$).

$$log_c a + log_c b = log_c ab \qquad (29)$$

$$log_c a - log_c b = log_c \frac{a}{b} \qquad (30)$$

$$log_c a^k = k log_c a \qquad (31)$$

$$log_{c^n} a = \frac{1}{n} log_c a \qquad (32)$$

$$c^{log_c a} = a \qquad (33)$$

$$log_c 1 = 0 \qquad (34)$$

$$log_c c = 1 \qquad (35)$$

Пример 25. Решите неравенство

$$log_5 x \leq 2\,. \qquad (36)$$

Решение.

Прологарифмируем правую часть:

$$log_5 x \leq log_5 5^2 \text{ или } log_5 x \leq log_5 25\,.$$

Откуда

$$x \leq 25\,.$$

А с учетом области допустим значений x (ОДЗ) получим:

$$0 < x \leq 25.$$

Ответ: $x \in (0; 25]$.

Пример 26. Решите неравенство

$$log_{0,1} x > 3\,. \qquad (37)$$

Решение.

ОДЗ логарифмической функции:

$$x > 0.$$

Прологарифмируем число 3:

$$log_{0,1} x > log_{0,1} 0{,}1^3 \text{ или } log_{0,1} x > log_{0,1} 0{,}001\,.$$

Так как основание логарифма меньше 1, легко заключить:

$$x < 0{,}001.$$

Найти ответ с учетом ОДЗ труда не составит.

Ответ: $x \in (0; 0{,}001)$.

Пример 27. Решите неравенство

$$log^2{}_{0,5}x + log_{0,5}x - 2 > 0. \tag{38}$$

Решение.

Пусть $t = log_{0,5}x$, тогда $t^2 = log_{0,5}x \cdot log_{0,5}x = log^2{}_{0,5}x$. Очевидно, что такой логарифм имеет смысл лишь при $x > 0$ (ОДЗ). После подстановки неравенство (38) принимает вид:

$$t^2 + t - 2 > 0.$$

Решив его методом интервалов, получим:

$$\left[\begin{array}{l} t < -2, \\ 1 < t. \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} log_{0,5}x < -2, \\ 1 < log_{0,5}x. \end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l} log_{0,5}x < log_{0,5}0{,}5^{-2}, \\ log_{0,5}0{,}5 < log_{0,5}x. \end{array}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l} x > 0{,}5^{-2}, \\ 0{,}5 > x. \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x < 0{,}5. \end{array}\right.$$

Найти ответ с учетом ОДЗ особого труда не составит.

Ответ: $x \in (0; 0{,}5) \cup (4; +\infty)$.

Пример 28. Решите неравенство

$$log_x(x-2) \le 0. \tag{39}$$

Решение.

Запишем условия существования логарифма (ОДЗ):

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \ne 1, \\ x - 2 > 0; \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x > 0, \\ x \ne 1, \\ x > 2; \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty). \tag{40}$$

Прологарифмируем правую часть:

$$log_x(x-2) \le log_x 1.$$

Далее, допустимы два случая.

1) При $x > 1$ знак неравенства сохраняется, тогда:

$$x - 2 \le 1 \qquad \Rightarrow \qquad x \le 3$$

А значит

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \le 3. \end{cases}$$

2) При $x < 1$ знак неравенства меняется:

$$x - 2 \ge 1 \qquad \Rightarrow \qquad x \ge 3.$$

Запишем в виде пересечения:

$$\begin{cases} x < 1, \\ x \ge 3. \end{cases}$$

Составим совокупность (объединение) обоих случаев и найдём решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x \ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} 1 < x \le 3, \\ x = \emptyset \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad 1 < x \le 3. \qquad (41)$$

Остается найти пересечение (40) и (41):

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \ne 1, \\ x > 2; \\ 1 < x \le 3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (2;3]$.

Метод рационализации – это метод, основанный на свойствах функции, который позволяет заметно упростить логарифмическое неравенство опредленного вида до более простого - рационального.

Метод рационализации

Неравенство вида
$$log_g f \vee 0,$$
(здесь f и g функции, зависящие от x)
можно заменить неравенством
$$(g-1)(f-1) \vee 0.$$

Пример 29. Решите неравенство
$$log_{1-2x}(3+x) \leq 0. \qquad (42)$$
Решение.
ОДЗ:
$$\begin{cases} 3+x>0, \\ 1-2x \neq 1, \\ 1-2x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x \neq 0, \\ x<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Согласно методу рационализации неравенство (42) поэтапно преобразуется:
$$(1-2x-1)(3+x-1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2x)(2+x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2+x) \geq 0.$$

Согласно методу интервалов последнее имеет решение:
$$\left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x \geq 0. \end{array}\right. \qquad (43)$$

Найдем пересечение ОДЗ и решения (43) на графической иллюстрации (см. рисунок 26):
$$\begin{cases} x>-3, \\ x \neq 0, \\ x<\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x \geq 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

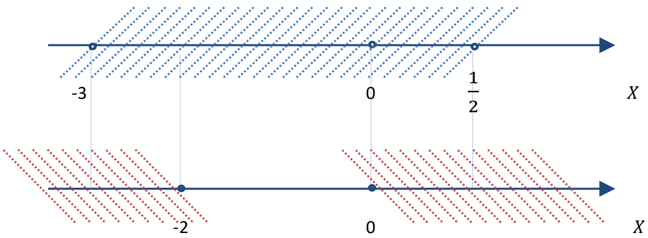


Рис. 26. Совмещение ОДЗ и множества решения (35)

На рисунке 26 сверху изображено графическое решение ОДЗ, тогда как снизу – множество решения совокупности (43). Совмещая оба множества, находим ответ.

Ответ: $x \in (-3;-2] \cup \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Пример 30. Решите неравенство

$$log_{0,25x^2}\left(\frac{6-x}{4}\right) \le 1. \qquad (44)$$

Решение.

ОДЗ состоит из трех условий:

$$\begin{cases} \frac{6-x}{4} > 0, \\ 0,25x^2 \ne 1, \\ 0,25x^2 > 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 6, \\ x \ne \pm 2, \\ x \ne 0. \end{cases}$$

Первое очень простое, как и второе, а вот в третьем – нужно подумать. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = 0,25x^2$, которая, как известно, лежит выше оси x и обращается в 0 лишь при $x = 0$. Возникает вопрос: при каких x функция $f(x) = 0,25x^2$ принимает строго положительные значения? Ответ: при любых x, кроме 0 $(x \ne 0)$.

Переходим непосредственно к неравенству (44). Вот последовательность равносильных переходов:

$$log_{0,25x^2}\left(\frac{6-x}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow log_{0,25x^2}\left(\frac{6-x}{4}\right) - 1 \le 0 \Leftrightarrow log_{0,25x^2}\left(\frac{6-x}{4}\right) - log_{0,25x^2}0,25x^2 \le 0.$$

Применяя метод рационализации, получим:

$$(0,25x^2 - 1) \cdot \left(\frac{6-x}{4} - 0,25x^2\right) \le 0 \text{ или } (x^2 - 4) \cdot (6 - x - x^2) \le 0.$$

Пусть $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (6 - x - x^2)$. Найдём нули $f(x)$ и отметим их на числовой оси.

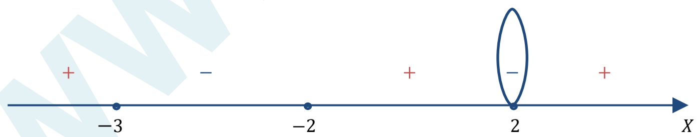


Рис. 27. Знаки функции $f(x)$

Согласно рисунку 27 получим решение:

$$-\infty < x \le -3, \ -2 \le x < +\infty \qquad (45)$$

Теперь осталось найти пересечение ОДЗ с множеством решения (45) на графической иллюстрации (см. рисунок 28), но сначала запишем общую систему:

$$\begin{cases} x < 6, \\ x \ne \pm 2, \\ x \ne 0, \\ \left[\begin{array}{l} -\infty < x \le -3, \\ -2 \le x < +\infty \end{array}\right. \end{cases}$$

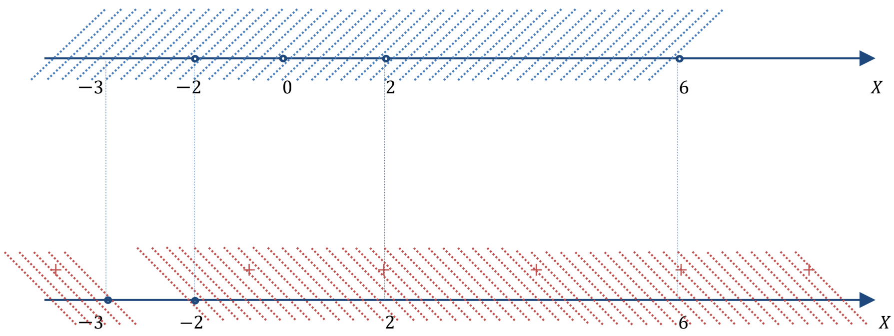


Рис. 28. Совмещение ОДЗ и множества решения (45)

На рисунке 28 изображено совмещение ОДЗ и множества решения (45). Выбрать общее решение с учетом ОДЗ предоставляется читателю самостоятельно.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6)$.

Таким образом, метод рационализации освобождает от рассмотрения двух возможных случаев логарифмического основания, содержащего x, и заметно упрощает само логарифмическое неравенство определенного вида до более простого - рационального неравенства.

§6 Смешанные или комбинированные неравенства

В предыдущих параграфах вы узнали о рациональных, показательных и даже логарифмических неравенствах. Что же такое смешанное неравенство, спросите вы? Как его следует решать? Вот на эти вопросы вы найдете ответы в заключительном параграфе этого пособия.

Для начала посмотрите внимательно на примеры (46) и (47). Очевидно, что первое неравенство является показательным, а второе – логарифмическим. Теперь посмотрите на пример (48). Это неравенство содержит как показательную часть неравенства (46), так и логарифмическую часть неравенства (47). Такое неравенство по праву называть *показательно-логарифмическим* или просто *смешанным,* а иногда говорят *комбинированным* неравенством.

$$0{,}5^x \leq 32\,. \tag{46}$$

$$log_x\left(\frac{x}{x+1}\right) \leq 0\,. \tag{47}$$

$$0{,}5^{log_x\left(\frac{x}{x+1}\right)} \leq 1\,. \tag{48}$$

Смешанные неравенства могут содержать различные алгебраические конструкции, такие как: модуль числа, дробь, квадратный корень n-ой степени и т.п. Недостаточно при решении смешанных неравенств уметь применять комбинации различных алгебраических приемов и методов, необходимо и достаточно уверенно знать *функциональный анализ.*

Рассмотрим несколько типовых случаев на следующих примерах.

Пример 31. Решите неравенство (48).

Решение.
Запишем ОДЗ логарифмической функции:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0, \\ x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < -1, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Далее преобразуем показательную часть:

$$0{,}5^{log_x\left(\frac{x}{x+1}\right)} \leq 1 \Leftrightarrow 0{,}5^{log_x\left(\frac{x}{x+1}\right)} \leq 0{,}5^0 \Leftrightarrow log_x\left(\frac{x}{x+1}\right) \geq 0\,.$$

Последнее дает логарифмическое неравенство с основанием x, которое заметно упрощается методом рационализации до вида:

$$(x-1)\left(\frac{x}{x+1} - 1\right) \geq 0 \text{ или } \frac{x-1}{x+1} \leq 0\,.$$

Откуда получим решение:

$$-1 < x \leq 1 \qquad (49)$$

Нам осталось составить общую систему пересечения ОДЗ с множеством решения (49) и, конечно же, решить её. Система принимает вид:

$$\begin{cases} x < -1, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ -1 < x \leq 1. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1.$$

Ответ: $x \in (0;1)$.

Пример 32. Решите неравенство:

$$log_{x^2-8}\left(4^{x^2-x-6}-1\right) \geq 0. \qquad (50)$$

Решение.

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} 4^{x^2-x-6}-1 > 0, \\ x^2-8 \neq 1, \\ x^2-8 > 0. \end{cases}$$

Начнём с простого не равенства -

$$x^2-8 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 3.$$

Из первого неравенства системы:

$$4^{x^2-x-6}-1 > 0 \Leftrightarrow 4^{x^2-x-6} > 4^0 \Leftrightarrow x^2-x-6 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) > 0.$$

Из последнего неравенства системы:

$$x^2-8 > 0 \Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right) > 0.$$

Система ОДЗ принимает вид:

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) > 0, \\ x \neq \pm 3, \\ \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right) > 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty;-3) \cup \left(-3;-2\sqrt{2}\right) \cup (3;+\infty).$$

Согласно методу рационализации неравенство (50) упрощается до вида:

$$(x^2-9)\left(4^{x^2-x-6}-2\right) > 0 \text{ или } (x^2-9)(2x^2-2x-13) > 0.$$

Найдем нули рациональной функции. В первом случае $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$, а во втором $2x^2-2x-13=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Решая методом интервалов, получим

$$x \in (-\infty;-3) \cup \left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2};3\right) \cup \left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2};+\infty\right).$$

Совмещая последнее множество с учетом ОДЗ вы найдете ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

Пример 33. Решите неравенство:

$$16^{log_4^2 x} + 7x^{log_2 x} - 32 \le 0. \tag{51}$$

Решение.
С ОДЗ все просто:

$$x > 0.$$

Считая, что

$$log_4^2 x = log_4 x \cdot log_4 x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot log_2 x \cdot log_2 x = \frac{1}{4} log_2^2 x$$

преобразуем

$$16^{log_4^2 x} = (2^4)^{log_4^2 x} = (2^4)^{\frac{1}{4} log_2^2 x} = 2^{log_2^2 x} = (2^{log_2 x})^{log_2 x} = x^{log_2 x}.$$

Тогда неравенство (51) принимает вид

$$x^{log_2 x} + 7x^{log_2 x} - 16 \le 0 \text{ или } 8x^{log_2 x} - 32 \le 0.$$

Откуда

$$x^{log_2 x} \le 4.$$

Прологарифмируем обе части

$$log_2 x^{log_2 x} \le log_2 4 \text{ или } log_2 x \cdot log_2 x - 2 \le 0.$$

А после формулы сокращенного умножения

$$\left(log_2 x - \sqrt{2}\right)\left(log_2 x + \sqrt{2}\right) \le 0.$$

Применяя метод рационализации, с учетом ОДЗ получим

$$\begin{cases} \left(x - 2^{\sqrt{2}}\right)\left(x + 2^{-\sqrt{2}}\right) \le 0, \\ x > 0 \end{cases}$$

Откуда решение уже очевидно.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}; 2^{\sqrt{2}}\right]$.

Пример 34. Решите неравенство:

$$log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \le \frac{4}{2x+1}. \tag{52}$$

Решение.
ОДЗ:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{7}\right)^{x+\frac{1}{2}} > 0, \\ \left(\sqrt{7}\right)^{x+\frac{1}{2}} \neq 1, \\ 7^{\frac{2}{x^2+x}} > 0, \\ 2x+1 \neq 0, \\ x^2+x \neq 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Левая часть принимает вид

$$log_{\left(\sqrt{7}\right)^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} = log_{7^{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} = log_{7^{\frac{2x+1}{4}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}},$$

а после применения свойств степеней логарифма

$$log_{7^{\frac{2x+1}{4}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} = \frac{2}{x^2+x} \cdot \frac{4}{2x+1} \cdot log_7 7 = \frac{2}{x^2+x} \cdot \frac{4}{2x+1}.$$

Откуда неравенство (52) принимает вид

$$\frac{2}{x^2+x} \cdot \frac{4}{2x+1} \leq \frac{4}{2x+1} \text{ или } \frac{4}{2x+1} \cdot \left(\frac{2}{x^2+x} - 1\right) \leq 0\,.$$

Главная работа уже позади. Остаётся решить получившееся рациональное неравенство, и учесть ОДЗ.

Ответ: $x \in [-2; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

Тренировочные упражнения

Упражнение 1. Заполните таблицы 1.1-1.3.

Таблица 1.1. Расположите числа на числовой оси x

№1 $\frac{2}{3}$ и $0,75$ x	№2 $\frac{6}{7}$ и $0,79$ x	№3 $-\frac{5}{7}$ и $-\frac{6}{7}$ x
№4 $-\frac{11}{127}$ и $-\frac{6}{123}$ x	№5 $\frac{5}{8}$ и $\frac{7}{9}$ x	№6 $\frac{22}{7}$ и π x
№7 2^{10} и 4^6 x	№8 3^{11} и 9^5 x	№9 100^7 и 99^7 x
№10 $0,2^5$ и $0,2^6$ x	№11 $-0,5^{13}$ и $-0,5^{11}$ x	№12 28^{15} и 8^{25} x
№13 2^{54} и 3^{36} x	№14 3^{50} и 6^{40} x	№15 -7^{50} и -11^{30} x

№16 $3\sqrt{3}$ и $\sqrt{28}$ x	**№17** $\sqrt{51}$ и $5\sqrt{2}$ x	**№18** 8 и $4\sqrt{5}$ x
№19 -3 и $-2\sqrt{3}$ x	**№20** $\sqrt[4]{11}$ и $\sqrt[2]{3}$ x	**№21** $\sqrt[6]{27}$ и $\sqrt[3]{3}$ x
№22 2^{54} и 3^{36} x	**№23** 5^{14} и 27^{7} x	**№24** -3^{15} и -2^{25} x
№25 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и 2 x	**№26** $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ и 3 x	**№27** $-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ и $-\sqrt{3+\sqrt{8}}$ x
№28 $-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$ и -4 x	**№29** $\sqrt{17}-3$ и $5-\sqrt{15}$ x	**№30** $\sqrt{12}+3$ и $4+\sqrt{8}$ x

№31 $\log_2 3$ и 1 x	№32 $\log_5 4$ и 1 x	№33 $-\log_2 5$ и -1 x
№34 $\log_{0,5} 4$ и $\log_{0,5} 6$ x	№35 $\log_5 8$ и $\log_8 5$ x	№36 $\log_8 13$ и $\log_9 13$ x
№37 $\log_4 0{,}6$ и $\log_5 0{,}36$ x	№38 $\log_5 2$ и $\frac{3}{7}$ x	№39 $\log_5 2$ и $\log_2 1$ x
№40 $2^{\log_5 3}$ и $5^{\log_2 3}$ x	№41 $4^{\log_3 5}$ и $5^{\log_3 4}$ x	№42 $7^{\log_3 2}$ и $2^{\log_3 7}$ x
№43 $arccos\frac{1}{2}$ и $arccos\frac{2}{3}$ x	№44 $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $arccos\frac{1}{2}$ x	№45 $arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{5}{3}$ x

№46 $\sin 3\pi$ и $\log_5 3$ x	**№47** $\cos\frac{\pi}{3}$ и $\log_5 7$ x	**№48** $\log_{51} 1$ и $arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$ x
№49 $2^{\log_4 3}$ и $\tan\frac{\pi}{6}$ x	**№50** $2^{\log_{0,5} 3}$ и $\tan\frac{\pi}{3}$ x	**№51** $\log_5 26$ и $\cos 0$ x
№52 $\cos 0$ и $\log_7 51$ x	**№53** $-\tan\frac{\pi}{3}$ и $8^{\log_{0,5} 3}$ x	**№54** $\tan\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3}{7}$ x

Таблица 1.2. Решите систему/совокупность линейных неравенств		
№1 $\begin{cases}2x+15>0,\\x+10<3.4\end{cases}$ x Ответ:	**№2** $\begin{cases}3x-5\geq 0,\\4+x<5.9\end{cases}$ x Ответ:	**№3** $\begin{cases}4x-5>2,\\1+x\geq 0.9\end{cases}$ x Ответ:
№4 $\begin{cases}2x+1\geq -3,\\x-2\geq 2.4\end{cases}$ x Ответ:	**№5** $\begin{cases}0.2x-1<0.5,\\2x\geq -3\end{cases}$ x Ответ:	**№6** $\begin{cases}7.2x+2\leq 4.4,\\7x>-5\end{cases}$ x Ответ:
№7 $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{5}{7}>\frac{2}{7},\\\frac{5}{7}x+\frac{3}{4}<\frac{11}{4}\end{cases}$ x Ответ:	**№8** $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{11}<\frac{25}{11},\\\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}<\frac{5}{6}\end{cases}$ x Ответ:	**№9** $\begin{cases}\frac{5}{7}-\frac{1}{2}x\geq\frac{12}{7},\\\frac{5}{2}x-\frac{1}{7}>\frac{13}{7}\end{cases}$ x Ответ:
№10 $\left[\begin{array}{l}x-\log_7 1>1,\\\log_3 27+5x\leq 1\end{array}\right.$ x Ответ:	**№11** $\left[\begin{array}{l}2x-\log_7 7\geq 3,\\\log_4 8-3x\leq 0\end{array}\right.$ x Ответ:	**№12** $\left[\begin{array}{l}-x+2\log_7 49>-2,\\-2\log_3 9+7x\leq 1\end{array}\right.$ x Ответ:
№13 $\left[\begin{array}{l}x+\log_5 2>0,\\4x\leq 6\end{array}\right.$ x Ответ:	**№14** $\left[\begin{array}{l}x-\log_5 0{,}36\geq 0,\\x-\log_5 0{,}6>0\end{array}\right.$ x Ответ:	**№15** $\left[\begin{array}{l}4x+\log_5 0.2\leq 0,\\\log_9 3-x\leq 0\end{array}\right.$ x Ответ:
№16 $\begin{cases}4x+\log_{16} 8>-2.25,\\\log_{0.5} 8+7x\leq 4\end{cases}$ x Ответ:	**№17** $\begin{cases}-1+2\log_6 36>6x,\\\log_5 5-5x<-4\end{cases}$ x Ответ:	**№18** $\begin{cases}x>-\log_{0.13} 1,\\\log_7 2-x\leq 0\end{cases}$ x Ответ:

№19

$$\begin{cases} 2x-1>0, \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$$

x

Ответ:

№20

$$\begin{cases} 7x-7>0, \\ x\neq \log_5 6 \end{cases}$$

x

Ответ:

№21

$$\begin{cases} 17x-1<0, \\ x\neq \log_3 2 \end{cases}$$

x

Ответ:

№22

$$\begin{cases} 2x-1<\log_5 4, \\ 7^{2x-1}\neq 1 \end{cases}$$

x

Ответ:

№23

$$\begin{cases} x<\log_5 7, \\ 2^{x+1}\neq 4 \end{cases}$$

x

Ответ:

№24

$$\begin{cases} 2x+1<\log_5 4, \\ 3^{\frac{x-2}{3}}\neq 9 \end{cases}$$

x

Ответ:

№25

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}<6, \\ 3^{\frac{x-2}{3}}\neq 9 \end{cases}$$

x

Ответ:

№26

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-1\dfrac{2}{9}>\dfrac{7}{18}, \\ x\neq \sqrt{3+2\sqrt{2}} \end{cases}$$

x

Ответ:

№27

$$\begin{cases} 1\dfrac{3}{4}<\dfrac{7}{16}-x, \\ x\neq \sqrt{4-2\sqrt{3}} \end{cases}$$

x

Ответ:

№28

$$\left[\begin{array}{l} 3-\log_2 x>1, \\ \log_3 x-3>0 \end{array}\right.$$

x

Ответ:

№29

$$\left[\begin{array}{l} x-\log_7 49\geq 3, \\ -\log_4 8<x\leq 0 \end{array}\right.$$

x

Ответ:

№30

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 0{,}6<x-1, \\ x\leq \log_5 0{,}04 \end{array}\right.$$

x

Ответ:

№31

$$\left[\begin{array}{l} x+\log_5 2>0, \\ 4x\leq 6 \end{array}\right.$$

x

Ответ:

№32

$$\left[\begin{array}{l} 2+\log_{32} x>1, \\ 2-\log_5 x>0 \end{array}\right.$$

x

Ответ:

№33

$$\left[\begin{array}{l} 4x+\log_5 0.2\leq 0, \\ \log_9 3-x\leq 0 \end{array}\right.$$

x

Ответ:

№34

$$\begin{cases} \log_5 0{,}6>x, \\ x\leq 1-\log_5 3 \end{cases}$$

x

Ответ:

№35

$$\begin{cases} 3x-\log_2 \dfrac{25}{3}>0, \\ 3-2x\geq 0 \end{cases}$$

x

Ответ:

№36

$$\begin{cases} 2x-5<0, \\ 8-3^x\geq 0 \end{cases}$$

x

Ответ:

№37 $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}8x-1>0,\\3^x>0;\end{cases}\\1-\log_2 3x\ge 0\end{array}\right.$ x Ответ:	**№38** $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-\log_2 3>0,\\3^{2x}\le 81;\end{cases}\\4^x<0\end{array}\right.$ x Ответ:	**№39** $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x-15>0,\\2^{2-x}\le 0.5;\end{cases}\\2^x-8<0\end{array}\right.$ x Ответ:
№40 $\begin{cases}8-2^{6x}>0,\\2-3^{-x}<0,\\\dfrac{x+7}{14}\ge 0\end{cases}$ x Ответ:	**№41** $\begin{cases}25-5^x>0,\\7^{-x}<3,\\\dfrac{1}{1-x}\ge 0\end{cases}$ x Ответ:	**№42** $\begin{cases}\log_{25}5-5^x>0,\\7^x\le 49,\\\dfrac{1}{1+2x}<0\end{cases}$ x Ответ:

Упражнение 2. Используя метод интервалов, решите квадратные неравенства:

а) $x^2-2x>0$;

б) $x^2+7x<0$;

в) $x^2+7x-8<0$;

г) $x^2+8x-9\ge 0$;

д) $x^2+4x+4>0$;

е) $x^2+9x>0$;

ё) $3x^2+5x-8>0$;

з) $2x^2+3x-2>0$;

и) $x^2-8>0$;

й) $x^2-9\ge 0$;

к) $16-x^2\ge 0$;

л) $x^2+8x+16>0$;

м) $x^2+6x+9<0$;

н) $x^2+14x+49\le 0$;

о) $4x^2-4x+1>0$;

п) $64x^2-25\ge 0$;

р) $3x^2-300>0$;

с) $5x-1-6x^2\le 0$;

т) $(2x-1)(3+2x)\le 0$;

у) $(7-2x)(8-5x)\le 0$;

ф) $x^2\ge 0$;

х) $9x^2+1<0$;

ч) $2+x^2>0$;

ш) $8+9x^2<0$.

Упражнение 3. Решите рациональные неравенства:

а) $\frac{1}{x-1} < 0;$

б) $-\frac{1}{x+2} > 0;$

в) $\frac{-x}{2x-1} < 0;$

г) $\frac{x-3}{2x} \geq 0;$

д) $\frac{1-x}{x} - 1 < 0;$

е) $\frac{2-x}{x} - 2 \leq 0;$

ё) $\frac{1-4x}{5-7x} \leq 0;$

з) $\frac{4+3x}{-x} > 0;$

и) $\frac{5+x}{5-x} \leq 0;$

й) $\frac{1+x}{x} < \frac{1}{2};$

к) $\frac{1-x}{x^2} \geq 0;$

л) $\frac{1+9x}{x^2-4} > 0;$

м) $\frac{7x}{x^2-5} < 0;$

н) $\frac{x}{x^2+1} \leq 0;$

о) $\frac{(1-x)(3x-2)}{x^2-2} > 0;$

п) $\frac{x(1+x)(3x+9)}{x^2-16} \leq 0;$

р) $\frac{x^3-2x^2}{(1-x)(3x-1)} \leq 0;$

с) $\frac{x^3-2x^2+x}{(1-5x)(x-3)} \leq 0;$

т) $\frac{2x^2+9}{(1-x^2)(3x-1)} > 0;$

у) $\frac{x^2-8x-9}{x(1-x^3)} \leq 0;$

ф) $\frac{x^4+x}{x^2+3x-4} < 0;$

х) $\frac{-x^2-5x}{(2x+7)(3x^2+8x-3)} > 0;$

ч) $\frac{(2-x)(4-x^2)(4x+0,5)^3}{(5x-1)^4} \geq 0;$

ш) $\frac{(1,5-x)(4+7x)^3(x-5)^2}{(x^2+5x-6)(8-2x^2)} < 0.$

Упражнение 4. Решите показательные неравенства:

а) $3^{9-2x} - 27 \leq 0;$

б) $5^{1+x^2} - 25 < 0;$

в) $2^{1-x^2} - 0.125 \geq 0;$

г) $81^{1-x} - 27 \geq 0;$

д) $64^{3x+7} \geq 2^{2x^2-2};$

е) $13^{x^2-9x} > 1;$

м) $\frac{(5^x-5)(16-2^x)}{3^x} \geq 0;$

н) $\frac{(25^x-5)(3^x-27)}{2^{-x}} \geq 0;$

о) $\frac{2^{x^2}-2}{2^x-8} \geq 0;$

п) $3^{\frac{x+10}{10}} - 13 \cdot 3^{\frac{x}{20}} + 4 \leq 0;$

р) $9^{\frac{x+2}{4}} - 13 \cdot 9^{\frac{x}{8}} + 4 < 0;$

с) $2^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} - 6 \geq 0;$

ё) $17^{2x-7x^2}-1>0$;

ж) $19^{x+x^2}-19>0$;

з) $9^{x^2+x}-81>0$;

и) $0.2^{\frac{1}{2x}}-0.04^{1-x}<0$;

й) $(3)^{\frac{5x-1}{5x+2}}\le 81$;

к) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{x+3}}>27$;

л) $(0.5)^{\frac{x+3}{x-2}}\le 32$;

т) $4^x-2^x-12\ge 0$.

Упражнение 5. Решите логарифмические неравенства:

а) $log_2(3+x)\le 0$;

б) $log_3(2x-5)<0$;

в) $log_2(7x+1)\ge 3$;

г) $log_5(x+6)\ge -1$;

д) $log_3(3x)\ge log_3(x+6)$;

е) $log_2(x)<log_2(6-x)$;

ё) $log_{0,5}(x^2+3x+12)<log_{0,5}(9-x)$;

ж) $log_{0,3}(x^2+5x)<log_{0,3}(7-x)$;

з) $log_3\frac{3x-7}{x+1}\ge 1$;

и) $log_{0,5}\frac{3-4x}{1-x}<1$;

й) $log_\pi(x+27)-log_\pi(16-2x)<log_\pi x$;

к) $lg(7-x)-lg(x)<lg\,0.5x$;

м) $0.4^{log_2^2x+1}<6.25^{2-log_2x^3}$;

н) $log_{0,1}(10^x-9)\ge x-1$;

о) $log_{\frac{1}{2}}\left(log_4\frac{x^2-2x}{x+10}\right)\ge 0$;

п) $log_2(x+1)>log_{x+1}16$;

р) $3+2\cdot 4^{log_x7}-2^{log_{\sqrt{x}}49}\ge 0$;

с) $log_{\frac{x+3}{x+1}}(x+27)\le 2$;

т) $log_{\frac{1-x}{2+2x}}(x-15)>0$.

л) $4^{log_2(3x-1)} \le 0$;

Упражнение 6. Решите неравенство:

а) $\frac{25\cdot 25^x - 26\cdot 5^x}{42-10x} < -\frac{1}{42-10x}$.

(ЕГЭ, 2005)

б) $\frac{log_{9x-6}(x+2)}{log_{9x-6}\ x^2} < 1$;

в) $\frac{2\cdot log_2(x^2-4x)}{log_3 x^2} \le 1$;

(ЕГЭ, 2011)

г) $log^2{}_2(16+6x-x^2) + 10\cdot log_{0,5}(16+6x-x^2) + 24 > 0$;

(ЕГЭ, 2015)

д) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}x} \ge \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{log_x(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$;

(МГУ, 2018)

е) $\frac{25^{x^2+x-10} - (0,2)^{x^2-2x-7}}{0,5\cdot 4^{x-1}-1} \le 0$;

(досрочный ЕГЭ, 2019)

ё) $(x+1)\cdot log_3 6 + log_3\left(2^x - \frac{1}{6}\right) \le x-1$;

(МИОО)

ж) $log_2(x-1)(x^2+2) \le 1 + log_2(x^2+3x-4) - log_2 x$;

(резервный ЕГЭ, 2019)

з) $log_{1+x^2}(1+27x^5) + log_{1-2x^2+27x^4}(1+x^2) \le 1 + log_{1-2x^2+27x^4}(1+27x^5)$.

("Физтех", 2019)