Математика ЕГЭ

Тригонометрические уравнения

Предисловие

Одним из самых простых заданий второй части ЕГЭ по математике принято считать задание под номером 13 (в прошлом задание С1). Как не трудно заметить, структура задания 13 (см. таблицу ниже) состоит из самых разных типов уравнений, а вот методы их решения практически одинаковы. В этом пособии представлены только тригонометрические уравнения, а для изучения чисто показательных, логарифмических или иррациональных уравнений обращаю вас к иным источникам.

Предполагается что ученик хорошо освоил программу среднего образования. Некоторые упражнения дифференцированы и представлены в табличной форме, каждое упражнение дополнено готовым чертежом, что позволит учащемуся не тратить время на дополнительные чертежи и построения. При решении задач данного пособия вы сможете устранить пробелы в знаниях, а также выработать устойчивые навыки их решения.

Чтобы справиться с заданием 13 ЕГЭ вы должны не только уверенно владеть навыками решения всех типов алгебраических уравнений, изучаемых в средней школе, но и хорошо понимать как устроен тригонометрический круг.

Структура задачи 13 Единого Государственного Экзамена по математике

<table>
<tr><th>Вопросы</th><th>Частота</th><th>Методы</th></tr>
<tr><td>Тригонометрические уравнения</td><td>умеренно</td><td rowspan="4">метод разложения на множители,
метод замены переменной,
метод введения вспомогательного угла</td></tr>
<tr><td>Показательные</td><td>редко</td></tr>
<tr><td>Логарифмические</td><td>редко</td></tr>
<tr><td>Смешанные или комбинированные</td><td>часто</td></tr>
</table>

Все тригонометрические уравнения можно представить следующей схемой.

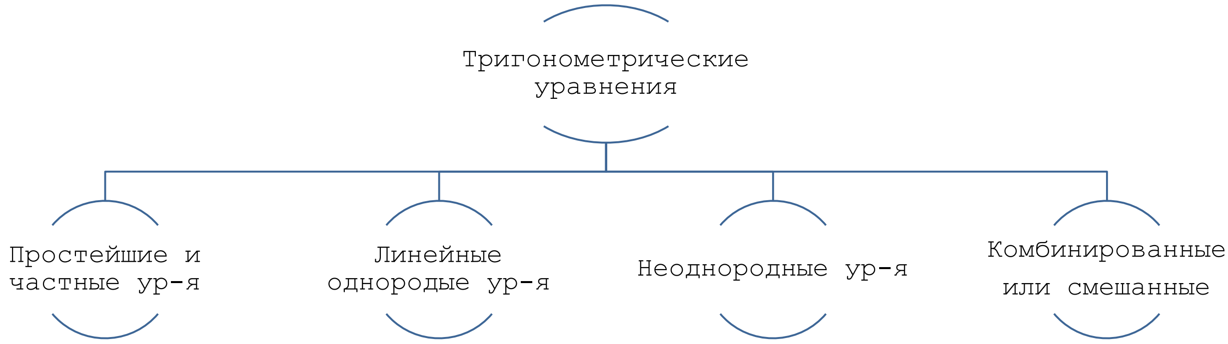


Рис.1 Типы тригонометрических уравнений

Схема очень проста. Простейшие тригонометрические уравнения довольно легко решаются с помощью тригонометрического круга, а все остальные типы уравнений сводятся к *простейшим или частным*. Для сведения к простейшим уравнениям используют различные методы: *метод замены переменной*, *метод разложения на множители*, *метод вспомогательного угла*.

СОДЕРЖАНИЕ

§1 Простейшие и частные тригонометрические уравнения

Тригонометрический круг применяется при изучении тригонометрии, с его помощью легко демонстрировать логические умозаключения. По сути вся тригонометрия основана на этом замечательном круге, поэтому чтобы хорошо понимать тригонометрию, вы должны понимать как устроен круг. Разберем несколько примеров.

Чтобы изобразить тригонометрический круг необходимо:

1) построить окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат;

2) задать положительное направление (против часовой стрелки).

Пример 1. Используя тригонометрический круг, решите уравнение

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Изобразим тригонометрический круг, на которой выделим “ось косинуса” (ось выделена красным см. рис. 2). На выбранной оси следует отметить значения -1, 0 и 1. При решении (1) также следует отметить число $\frac{\sqrt{3}}{2}$, что примерно составляет $0{,}8$. Фактически это означает, что $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ (табличное значение). Дополнительно, в силу симметрии относительно выбранной оси, следует отметить значение $-\frac{\pi}{6}$.

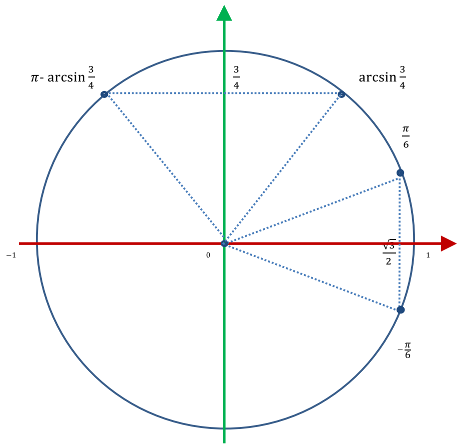


Рис. 2. Тригонометрический круг

Следовательно, уравнение (1) имеет решения вида:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \ \text{ и } \ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Пример 2. Используя тригонометрический круг, решите уравнение

$$\sin x = \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Решение. В случае (2) на оси ординат следует отметить число $\frac{3}{4}$ (ось выделена зеленым цветом см. рис. 2). Числу $\frac{3}{4}$ соответствуют два радианных значения на окружности - это $\arcsin\frac{3}{4}$ и $\pi - \arcsin\frac{3}{4}$ (не табличные значения). Следовательно, уравнение (2) имеет решения:

$$x_1 = \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi k, k \in Z \ \text{ и } \ x_2 = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

§2 Простейшие тригонометрические неравенства

Чтобы решить простейшее тригонометрическое неравенство также следует использовать тригонометрический круг. Разберем несколько примеров.

Пример 1. Используя тригонометрический круг, решите неравенство

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3}$$

Решение. Изобразим тригонометрический круг, выделяя "ось косинуса". На выбранной оси следует отметить $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}6$. Числу $\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют два радианных значения: $\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$ $(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4})$.

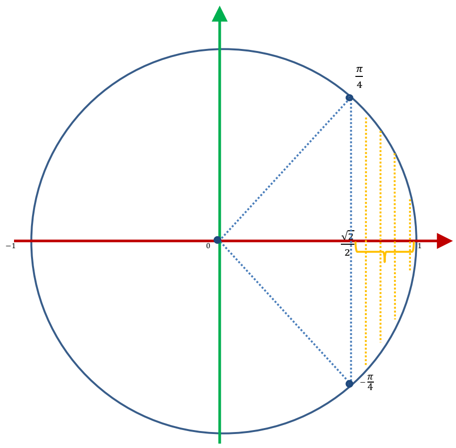


Рис. 3. Тригонометрический круг

Неравенство (3) удовлетворяет условию "желтой скобки" (см. рис. 3), как вы понимаете, - это все значения $\cos x$ принадлежащие отрезку $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. Соответственно для тригонометрического круга – это часть круга длиной от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$, то есть $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Следовательно, неравенство (3) имеет решение вида:

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Пример 2. Решите неравенство

$$\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{4}$$

Решение. Неравенство (4) удовлетворяет полуинтервалу $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Для тригонометрического круга – это часть круга в радианном выражении от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{7\pi}{4}$ ($\frac{7\pi}{4}$ та же точка что и $-\frac{\pi}{4}$), то есть $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Следовательно, неравенство (4) имеет решение вида:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

§3 Метод разложения на множители

Метод разложения на множители знаком школьнику с 6 класса. Данный метод позволяет разложить сложные выражения, сводящиеся к произведению, на простые компоненты – множители. Разберем несколько примеров.

Пример 1. Используя метод разложения на множители, решите уравнение

$$\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x = 0\,. \tag{5}$$

Решение. Для уравнения (5) вынесем $\sin x$, как общий множитель, за скобки. Получим

$$\sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{6}$$

Откуда $\sin x = 0$ и $\sin x - \frac{1}{2} = 0$. Оба уравнения легко решить с помощью круга. Первое уравнение является частным, а значит его решение заведомо известно. Для решения второго уравнения выделим "ось синуса" (зеленым цветом). На ней отметим числа -1, 0 и 1. Согласно уравнению (5) важно отметить еще одно число - это $\frac{1}{2}$ (см. рис. 4)

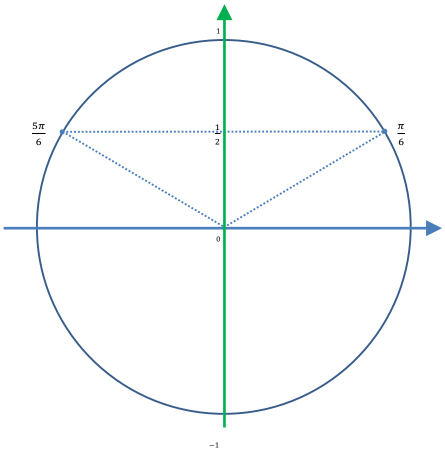


Рис. 4. Тригонометрический круг

На рисунке 4 изображено соответствие между числом $\frac{1}{2}$ по оси "синуса" и двум радианным значениям на окружности. Разумеется, получим $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$ (так как $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$). Следовательно, уравнение (5) имеет решения:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \ \text{ и } \ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z\,.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 2. Используя метод разложения на множители, решите уравнение

$$\frac{\cos^2 x - \cos x}{5} = 0\,. \tag{7}$$

Решение. Дробь равна 0 только в одном случае. Получим

$$\cos^2 x - \cos x = 0\,. \tag{8}$$

В уравнении (8) ОДЗ: $x \in R$.

Вынесем $\cos x$ (как общий множитель) за скобки, получим

$$\cos x\,(\cos x - 1) = 0. \tag{9}$$

Откуда имеем два частных уравнения $\cos x = 0$ и $\cos x = 1$. Соответственно -

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \text{ и } x_2 = 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ и $x_2 = 2\pi n, n \in Z$.

Пример 3. Используя метод разложения на множители, решите уравнение

$$\frac{\sin^2 x + \sin x}{\sqrt{\cos x}} = 0. \tag{10}$$

Решение. Как и в примере 7, дробь равна 0 только когда

$$\sin^2 x + \sin x = 0. \tag{11}$$

В примере (10) учтем ОДЗ - $\cos x > 0$. Неравенство имеет решение:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z. \tag{12}$$

Для (11) вынесем $\sin x$ за скобки, получим

$$\sin x\,(\sin x + 1) = 0.$$

Откуда два частных – это $\sin x = 0$ и $\sin x = 1$. Следовательно:

$$x_1 = \pi k, k \in Z \text{ и } x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

С учетом (12) решение (10) примет окончательный вид:

$$x = 2\pi l, l \in Z.$$

Ответ: $x = 2\pi l, l \in Z$.

§4 Метод замены переменной

Метод замены переменной – это метод, позволяющий заметно упростить уравнение, путем замены сложных повторяющихся выражений новой переменной. Данный метод, как правило, позволяет свести тригонометрическое уравнение к алгебраическому. Во многом вам помогут знания некоторых формул тригонометрии:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$ – основное тождество (13)

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$ – синус двойного угла (14)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$ – косинус двойного угла (15)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ – тангенс угла (16)

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$ – котангенс угла (17)

Пример 1. Используя метод замены, решите уравнение

$$\sin^2 x + 3\sin x - 4 = 0.$$

Решение. Пусть $t = \sin x$, тогда $t^2 = \sin^2 x$, получим $t^2 + 3t - 4 = 0$. Решив квадратное уравнение, имеем $t_1 = 1$ и $t_2 = -4$. Выполним обратную замену, получим

$$\sin x = 1 \text{ и } \sin x = -4.$$

В последнем случае - решения нет, а в первом - $x = \pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = \pi k, k \in Z$.

Пример 2. Используя метод замены, решите уравнение

$$\cos^3 x + 4\cos^2 x - \cos x - 4 = 0.$$

Решение. Пусть $t = \cos x$, получим $t^3 + 4t^2 - 4t - 4 = 0$. Группируя по парам, получим $(t^2 - 1)(t + 4) = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ и $t_3 = 4$. В последнем случае - решения нет, а в первых двух - соответственно $x_1 = 2\pi k, k \in Z$ и $x_2 = \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x_1 = 2\pi k, k \in Z$ и $x_2 = \pi n, n \in Z$.

Пример 3. Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0.$$

Решение. Из (13) следует, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, тогда левая часть уравнения примет вид $2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 \Rightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Пусть $t = \sin x$, тогда $2t^2 - 3t + 1 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{4}$. Соответственно:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;\ x_2 = \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z;\ x_3 = \pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi l, l \in Z;$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$; $\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $\pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi l, l \in Z$.

§5 Метод вспомогательного угла

Метод вспомогательного угла – это метод, позволяющий упростить уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$ (*линейное однородное уравнение первой степени*, где a, b, c – действительные числа) путем применения одной из формул (косинус суммы, косинус разности, синус суммы, синус разности), и сведения его к простейшему.

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y = \cos(x+y) \text{ – косинус суммы} \tag{18}$$

$$\cos x\cos y + \sin x\sin y = \cos(x-y) \text{ – косинус разности} \tag{19}$$

$$\cos x\sin y - \sin x\cos y = \sin(x-y) \text{ – синус разности} \tag{20}$$

$$\cos x\sin y + \sin x\cos y = \sin(x+y) \text{ – синус суммы} \tag{21}$$

Пример 1. Решите линейное однородное уравнение первой степени

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

Решение. Разделим обе части нашего уравнения (5) на $\sqrt{2}$, тогда получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1.$$

Далее заменим множители $\frac{1}{\sqrt{2}}$ соответственно на $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (*косинус и синус одного угла*), приводим к (21). Применяя формулу, получим простейшее

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

Пример 2. Решите уравнение

$$3\sin x + 4\cos x = 5.$$

Решение. Разделим обе части нашего уравнения на 5 ($a = 3$ и $b = 4$, а $c = \sqrt{a^2+b^2}$), получим

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1.$$

Далее заменим множители $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$ соответственно $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$ и $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$ (*синус и косинус одного угла*), применяя формулу (19), имеем –

$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} - x\right) = 1,$$

откуда $x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in Z$.

§6 Отбор корней

Следует отметить два способа отбора корней на заданном промежутке – *алгебраический и интервальный*. Рассмотрим оба способа на примерах.

Пример 1.

а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x - 1 = \frac{1}{2}$;

б) Найдите все корни данного уравнения на промежутке $(0; 3\pi)$.

Решение.

а) Перед нами простейшее уравнение с углом $2x$. Преобразуя, получим

$$\sqrt{3}\sin 2x = \frac{1}{2} + 1,$$
$$\sqrt{3}\sin 2x = \frac{3}{2},$$
$$\sin 2x = \frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

После несложных упрощений -

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Имеем два решения:

$$2x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \text{ и } 2x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z \text{ и } x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$

б) Произведём отбор корней алгебраическим способом. Пусть $I = (0; 3\pi)$. По первому решению (алгебраическим перебором) для целых n получим:

При $n = 0$, "нулевой" корень $x_0 = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{6}$, где $\frac{\pi}{6} \in I$;

При $n = 1$, "первый" корень $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 1 = \frac{7\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6} \in I$;

При $n = 2$, "второй" корень $x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2 = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6} \in I$;

При $n = 3$, "третий" корень $x_3 = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 3 = \frac{19\pi}{6}$, а $\frac{19\pi}{6} \notin I$.

Для остальных положительных n корней нет. По первому решению всего 3 корня.

Произведем отбор корней по второму решению. Получим:

При $n = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{3}$, где $\frac{\pi}{3} \in I$;

При $n = 1$, $x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 1 = \frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \in I$;

При $n = 2$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 2 = \frac{7\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3} \in I$;

При $n = 3$, $x_3 = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 3 = \frac{10\pi}{3}$, а $\frac{10\pi}{3} \notin I$.
Всего 6 корней. Запишем корни в порядке возрастания.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$;
б) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}$.

Пример 2.

а) Решите уравнение $\sin 3x - 1 = \cos 3x$;
б) Найдите все корни уравнения на промежутке $(-\pi; 2\pi)$.

Решение.
а) Имеем дело с линейным однородным уравнением. Приведем к стандартному виду -

$$\sin 3x + \cos 3x = 1.$$

Применяя метод вспомогательного угла, получим

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Имеем:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z \text{ и } x_2 = \frac{2\pi k}{3}, k \in Z.$$

б) Произведем отбор корней *интервальным способом*.
По первому решению для любого целого n:

$$-\pi < \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} < 2\pi,$$
$$-\pi - \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi n}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{6},$$
$$-\frac{7\pi}{6} < \frac{2\pi n}{3} < \frac{11\pi}{6},$$
$$-\frac{7}{6} < \frac{2n}{3} < \frac{11}{6},$$
$$-\frac{7}{4} < n < \frac{11}{4}.$$

Напомним, n – целое число, а значит оно может принимать значения -1, 0, 1 и 2.
Найдем корни:

$$n = -1, \ x_0 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot (-1)}{3} = -\frac{\pi}{2};$$
$$n = 0, \ x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 0}{3} = \frac{\pi}{6};$$
$$n = 1, \ x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 1}{3} = \frac{5\pi}{6};$$
$$n = 2, \ x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 2}{3} = \frac{3\pi}{2}.$$

Произведем отбор корней по второму решению для любого целого k:

$$-\pi < \frac{2\pi k}{3} < 2\pi, \text{ откуда } -\frac{3}{2} < k < 3.$$

Для целого k возможны значения -1, 0, 1 и 2. По второму решению имеем:

$k=-1,\ \ x_0=\frac{2\pi\cdot(-1)}{3}=-\frac{2\pi}{3};$

$k=0,\ \ x_1=\frac{2\pi\cdot 0}{3}=0;$

$k=1,\ \ x_2=\frac{2\pi\cdot 1}{3}=\frac{2\pi}{3};$

$k=2,\ \ x_3=\frac{2\pi\cdot 2}{3}=\frac{4\pi}{3}.$

Ответ: а) $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$ и $x_2=\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$;

б) $-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}.$

§7 Комбинированные уравнения

Комбинированные или *смешанные тригонометрические уравнения* – это уравнения, которые представлены в комбинации нескольких математических понятий одного неизвестного. Например, понятие тригонометрической неизвестной связано, скажем, с понятием арифметического корня или логарифма, или модуля.

Рассмотрим решение таких уравнений на примерах.

Пример 1. Решите уравнение

$$\log^2{}_2(\sin 2x) - \log_2(\sin 2x) - 2 = 0.$$

Решение.

а) Пусть $t = \log_2(\sin 2x)$, тогда получим

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Откуда

$$t_1 = -1 \text{ и } t_1 = 2.$$

Сделаем обратную замену, получим два простейших уравнения. Решим каждое из них.

$$\log_2(\sin 2x) = -1 \quad \text{и} \quad \log_2(\sin 2x) = 2 \Rightarrow \sin 2x = 2^2$$

$$x = \emptyset, \text{ т. к. } 4 > 1$$

$$\sin 2x = 2^{-1}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z;$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z$ и $x_2 = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z$.

Пример 2.

а) Решите уравнение

$$\frac{2\cos 3x - 3\sqrt{\cos 3x} + 1}{\sqrt{2\sin x + 3}} = 0;$$

б) Найдите все его корни на промежутке $(0; 3\pi)$.

Решение.

а) ОДЗ: $2\sin x + 3 > 0 \Rightarrow \sin x > -1{,}5 \Rightarrow x \in \mathcal{R}$.

Пусть $t = \sqrt{\cos 3x}$, тогда $t^2 = \cos 3x$. Получим $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$ и $t_1 = \frac{1}{2}$. Сделаем обратную замену, получим два простейших. Решим каждое из них.

$$\sqrt{\cos 3x} = 1,$$

$$\cos 3x = 1,$$

$$x = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

$$\sqrt{\cos 3x} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 3x = \frac{1}{4},$$

$$x = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z.$$

б) По первому решение произведём отбор корней интервальным способом:

$$0 < \frac{2\pi n}{3} < 3\pi,$$

$$0 < \frac{2n}{3} < 3,$$

$$0 < n < 4{,}5.$$

Значит n может принимать значения 1, 2, 3 и 4. Найдем корни:

При $n = 1$, $x_0 = \frac{2\pi\cdot 1}{3} = \frac{2\pi}{3}$;
При $n = 2$, $x_1 = \frac{2\pi\cdot 2}{3} = \frac{4\pi}{3}$;
При $n = 3$, $x_2 = \frac{2\pi\cdot 3}{3} = 2\pi$;
При $n = 4$, $x_3 = \frac{2\pi\cdot 4}{3} = \frac{8\pi}{3}$.

По второму решению оценим $\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4}$. Так как число $\frac{1}{4}$ меньше ближайшего табличного числа $\frac{1}{2}$, то $\arccos\frac{1}{4} > \arccos\frac{1}{2}$ или $\arccos\frac{1}{4} > \frac{\pi}{3}$ (по свойству). Выходит, что $\frac{\pi}{3} < \arccos\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}$, а значит $\frac{\pi}{9} < \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} < \frac{\pi}{6}$, что равносильно $20^\circ < \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} < 30^\circ$.

Пусть $I = (0; 3\pi)$. Произведем отбор корней алгебраическим способом:

При $k = 0$, $x_0 = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} \notin I$;
При $k = 1$, $x_0 = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi\cdot 1}{3}$, $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi}{3} \in I$;
При $k = 2$, $x_0 = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi\cdot 2}{3}$, $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{4\pi}{3} \in I$;
При $k = 3$, $x_0 = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi\cdot 3}{3}$, $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + 2\pi \in I$;
При $k = 4$, $x_0 = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi\cdot 4}{3}$, $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{8\pi}{3} \in I$;
При $k = 5$, $x_0 = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi\cdot 5}{3}$, $\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{10\pi}{3} \notin I$.

Всего 17 корней.

Ответы:

а) $x_1 = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$ и $x_2 = \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$;
б) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, 2π, $\frac{8\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{2\pi}{3}, \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{4\pi}{3}, \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + 2\pi, \pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{4} + \frac{8\pi}{3}$.

Тренировочные упражнения

Упражнение 1. Заполните таблицы 1.1-1.3, решив тригонометрические уравнения и неравенства с помощью круга.

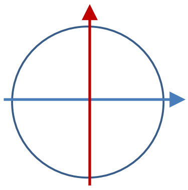
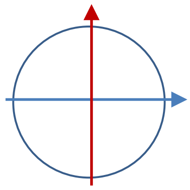
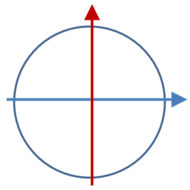
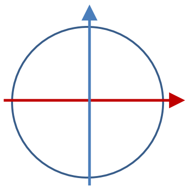
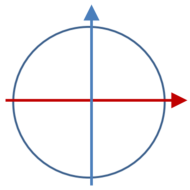
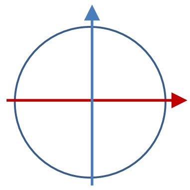
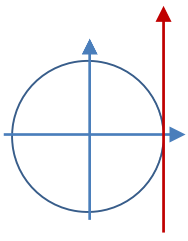
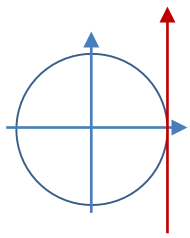
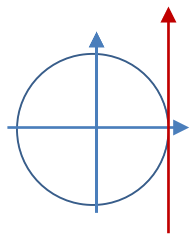
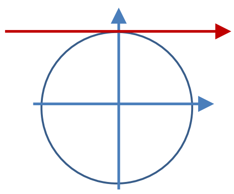
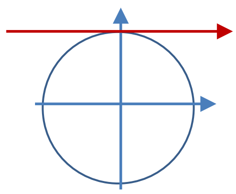
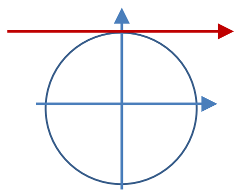
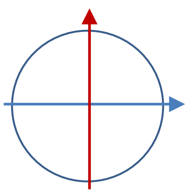
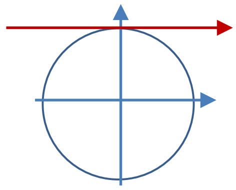
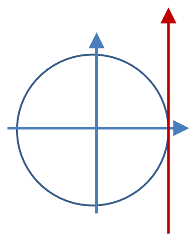
Таблица 1.1. Простейшие частные уравнения		
№1 $\sin x = -1$  Ответ:	№2 $\sin x = 0$  Ответ:	№3 $\sin x = 1$  Ответ:
№4 $\cos x = -1$  Ответ:	№5 $\cos x = 0$  Ответ:	№6 $\cos x = 1$  Ответ:
№7 $\operatorname{tg} x = -1$  Ответ:	№8 $\operatorname{tg} x = 0$  Ответ:	№9 $\operatorname{tg} x = 1$  Ответ:
№10 $\operatorname{ctg} x = -1$  Ответ:	№11 $\operatorname{ctg} x = 0$  Ответ:	№12 $\operatorname{ctg} x = 1$  Ответ:
№2 $\sin x = -4$  Ответ:	№13 $\operatorname{ctg} x = -2$  Ответ:	№14 $\operatorname{tg} x = 2$  Ответ:

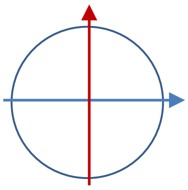
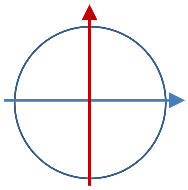
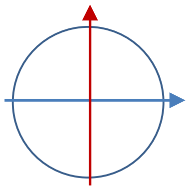
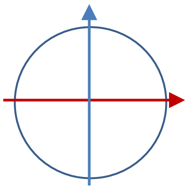
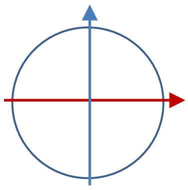
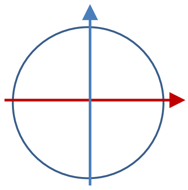
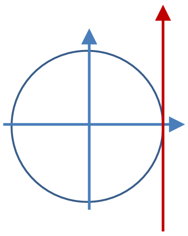
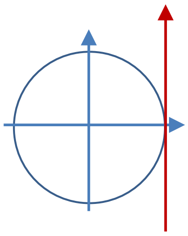
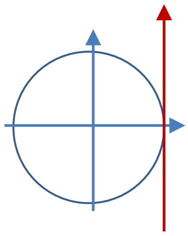
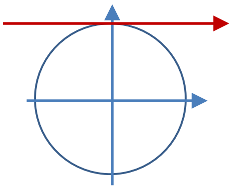
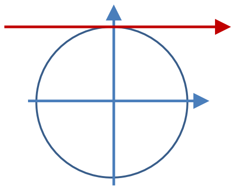
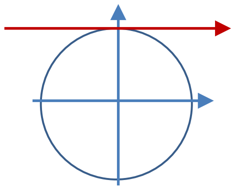
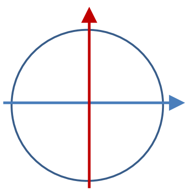
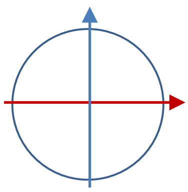
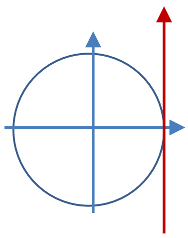
Таблица 1.2. Простейшие тригонометрические уравнения		
№1 $\sin x = -\frac{1}{2}$  Ответ:	№2 $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  Ответ:	№3 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  Ответ:
№4 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  Ответ:	№5 $\cos x = \frac{1}{2}$  Ответ:	№6 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  Ответ:
№7 $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$  Ответ:	№8 $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  Ответ:	№9 $\operatorname{tg} x = 3$  Ответ:
№10 $\operatorname{ctg} x = -3$  Ответ:	№11 $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$  Ответ:	№12 $\operatorname{ctg} x = 2$  Ответ:
№13 $\sin x = -3$  Ответ:	№14 $\cos x = \sqrt{3}$  Ответ:	№15 $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  Ответ:

Таблица 1.3. Простейшие тригонометрические уравнения

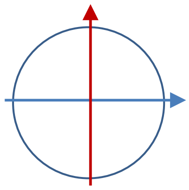
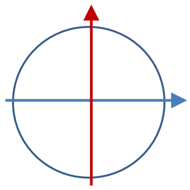
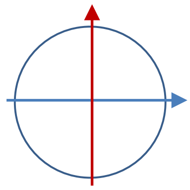
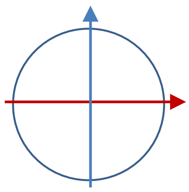
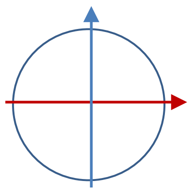
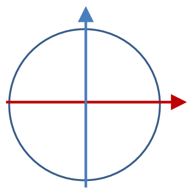
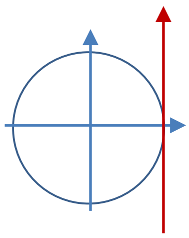
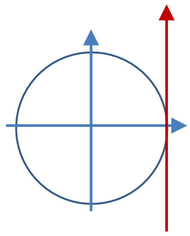
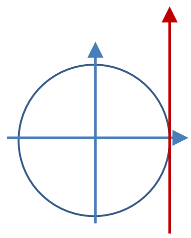
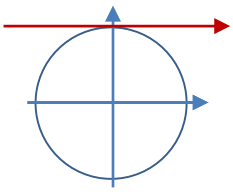
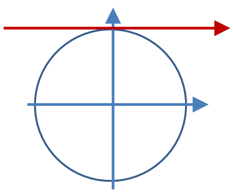
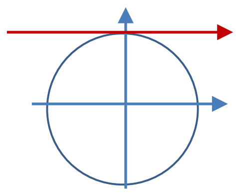
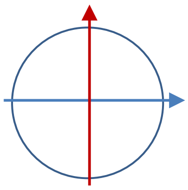
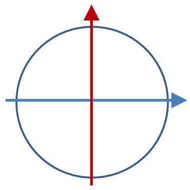
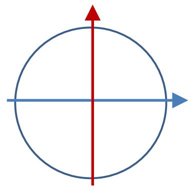
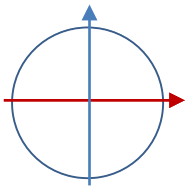
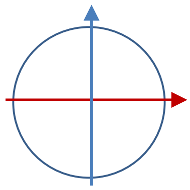
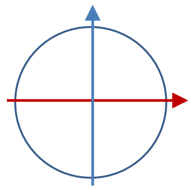
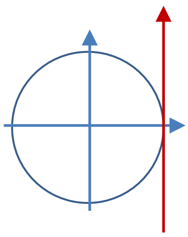
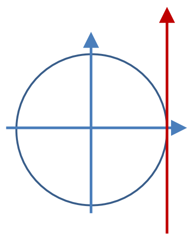
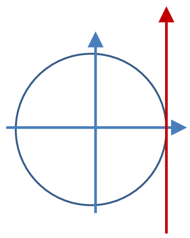
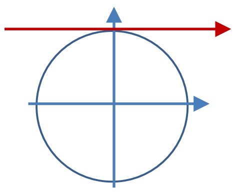
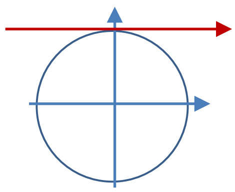
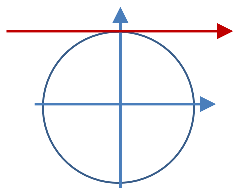
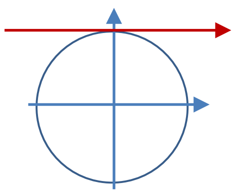
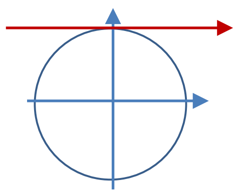
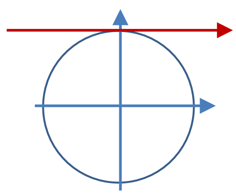
№1 $\sin(2x) = -1$  Ответ:	№2 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$  Ответ:	№3 $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right) - 1 = 0$  Ответ:
№4 $\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$  Ответ:	№5 $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$  Ответ:	№6 $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 3 = 4$  Ответ:
№7 $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$  Ответ:	№8 $\sqrt{3}\mathrm{tg}\,2x = -1$  Ответ:	№9 $\sqrt{2}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) - 1 = 0$  Ответ:
№10 $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = -1$  Ответ:	№11 $10\mathrm{ctg}(\pi + 2x) = 0$  Ответ:	№12 $\sqrt{3}\mathrm{ctg}(\pi + 2x) + 1 = 2$  Ответ:

Таблица 2.1. Простейшие тригонометрические неравенства		
№1 $\sin x \leq 0$  Ответ:	№2 $\sin x \geq -\frac{1}{2}$  Ответ:	№3 $\sin x \leq 1$  Ответ:
№4 $\cos x < \frac{1}{2}$  Ответ:	№5 $\cos x \geq 0$  Ответ:	№6 $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  Ответ:
№7 $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$  Ответ:	№8 $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$  Ответ:	№9 $\operatorname{tg} x \geq 3$  Ответ:
№10 $\operatorname{ctg} x \leq -1$  Ответ:	№10 $\operatorname{ctg} x > 3$  Ответ:	№12 $\operatorname{ctg} x \leq 2$  Ответ:
№13 $\operatorname{ctg} x < -3$  Ответ:	№14 $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}$  Ответ:	№15 $\operatorname{ctg} x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$  Ответ:

Упражнение 2. Используя метод разложения на множители, получите простейшие уравнения (решите их):

а) $4\sin x + \sin^2 x = 0$;

б) $\sin x - 6\sin^2 x = 0$;

в) $\sqrt{7}\sin^2 2x + \sin 2x = 0$;

г) $\sqrt{11}\cos^2 x + \cos x = 0$;

д) $100\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x = 0$;

е) $\cos^2 x = -13\cos(\pi - x)$;

ё) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)(2\sin 2x - 1) = 0$;

ж) $(\cos x - 1)\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right) = 0$;

з) $\sin 4x\left(\sqrt{3}\mathrm{tg}\, x - 1\right) = 0$;

и) $\cos 5x\,(2\sin 2x - 1) = 0$;

й) $\sqrt{7}\sin x\left(\sqrt{3}\mathrm{tg}\, x + 3\right) = 0$;

к) $\cos 2x + \sin^2 x - 1 = 0$;

л) $2\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$;

м) $\sin 2x - 3\cos x = 0$;

н) $\sin 4x\,(5\sin x - 3) = 0$;

о) $(2\sin x + 1)(2\sin x - 5) = 0$;

п) $(3\sin x - 4)\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) = 0$;

р) $(\cos x - 4)\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1\right) = 0$;

с) $\dfrac{\sqrt{2}\cos^2 x - 11\cos x}{\sin x} = 0$;

т) $\dfrac{(2\sin x + 3)(2\sin x - 1)}{2\sin x} = 0$;

у) $\dfrac{(2\mathrm{tg}\, x + 3)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1\right)}{\sin x - 4} = 0$;

ф) $\dfrac{4\sin x + \sin^2 x}{\sin x - 1} = 0$;

х) $\dfrac{\sin x - 2\sin^2 x}{\cos x} = 0$;

ч) $(3\cos x + 5)\left(13 - \mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)\right) = 0$.

Упражнение 3. Решите неравенство:

а) $\cos x - 1 > 0$;

б) $\cos x < -\dfrac{1}{7}$;

в) $\cos 2x \le \dfrac{1}{2}$;

г) $\sqrt{7}\cos 2x \le 0$;

д) $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

е) $7\sin x - 7 < 0$;

ё) $\sin x + \dfrac{2}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

ж) $-\dfrac{2}{3}\sin x \le \dfrac{1}{3}$;

з) $\sin 2x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

и) $\sqrt{17}\sin 2x < 0$;

й) $\sqrt{3}\mathrm{tg}\, x \le -1$;

к) $\mathrm{tg}\, 3x \ge -\sqrt{3}$;

л) $2\,\mathrm{tg}\, x - 1 \ge 3$;

м) $\mathrm{tg}\, 2x \ge 1$;

н) $\mathrm{tg}\, 2x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

о) $\sqrt{3}\mathrm{tg}\, x \le -1$;

п) $\mathrm{ctg}\, x - 3 > -4$;

р) $\mathrm{ctg}\, 3x \ge 0$;

с) $\mathrm{ctg}\, 2x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

т) $\mathrm{ctg}\, 3x \ge \sqrt{3}$.

Упражнение 4. Используя метод вспомогательного угла, решите линейное однородное уравнение первой степени:

а) $\cos x + \sin x = 0$;

б) $\cos 2x + \sin 2x = 1$;

в) $\sqrt{3}\sin x = \cos x$;

г) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$;

д) $3\cos x - 2\sin x = 0$;

е) $6\cos x - 8\sin x = 0$;

ё) $3\sin x - 4\cos x = 1$.

ж) $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = -\sqrt{3}$;

з) $\cos x + \sin x = 2\sin x - 1$.

Упражнение 5. Преобразуйте, используя тригонометрические формулы, а затем примените метод замены переменой или метод разложения на множители:

а) $2\sin^2 x + 7\sin x + 3 = 0$

б) $4\cos x \sin x - 3\sin^2 x = 1$;
(berdov.com)

в) $\sin^2 2x + 4\sin 2x - 3 = 0$;

г) $\operatorname{tg} 3x - 4\operatorname{ctg} 3x - 3 = 0$;

д) $4\sin^3 x = \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$;
(И. В. Яковлев, mathus.ru)

е) $\sin^2 x + 7\cos x = 8$;

ё) $2\sin 2x + \sin x = 4\cos 2x + 1$;
(С. А. Шестаков, ЕГЭ 2014)

ж) $\sin^2 x + 7\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = 8$;

з) $3\cos 2x + 11\sin x = 7$;
(МГУ, 2006)

и) $\cos 2x = \cos x + \sin x$;
(И. В. Яковлев, А.Г. Малкова, ege-study.ru)

й) $\sin 2x = \cos x + \sin x + 1$;
(И. В. Яковлев, А.Г. Малкова, ege-study.ru)

к) $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$.
(М. И. Сканави, 2011)

Упражнение 6. Решите уравнения:

а) $\dfrac{5\cos x - 4}{4\operatorname{tg} x - 3} = 0, \left[-\dfrac{7\pi}{2}; 0\right]$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1}{2\sin x - 1} = 0, \left[\dfrac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$;

в) $\dfrac{13\sin^2 x - 6\sin x}{13\cos x + 12} = 0, \left[\dfrac{\pi}{2}; 4\pi\right]$;

г) $\dfrac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}} = 0, \left[-\dfrac{\pi}{2}; 4\pi\right]$;

д) $\dfrac{2\sin^2 x + 3\cos x}{\sqrt{\sin x}} = 0, \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{2}\right]$;

е) $\dfrac{\sin^2 x - \sin 2x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0, \left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$;

ё) $\dfrac{\sin^2 3x + \sin 6x}{\sqrt{x}} = 0, \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$;

ж) $\dfrac{3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 3x - 3}{\operatorname{tg} 3x - \sqrt{3}} = 0, [0; 3\pi]$;

з) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}, \left[\dfrac{3\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Упражнение 7. Решите уравнения. Найдите корни из отрезка:

а) $\sqrt{6\sin x} = 2\cos x, [0; 2\pi]$;
(МГУ,2011 год)

б) $(2\cos^2 x - \cos x - 1)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0, [0; 2\pi]$;
(МГУ,1997 год)

в) $|\sin x| = 2\cos x, [-2\pi; 2\pi]$;

г) $6^{\cos x} = (0{,}5)^{-\sin x} \cdot 3^{\cos x}, \left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$;
(С. А. Шестаков, ЕГЭ 2014)

д) $2\cos x - 3\sqrt{\cos x} + 2 = 0, \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$;
(А. Ларин, alexlarin.net)

е) $\dfrac{\sqrt{\sin x} - \cos x}{\sqrt{\operatorname{tg}(x)}} = 0, \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$;

ё) $\dfrac{|\sin x| + \sin^2 x}{\sqrt{3|\sin x| - 2}} = 0, \left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$;

ж) $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3, \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
(С. А. Шестаков, ЕГЭ 2014)